

# موقع الفردي في الفيزياء

تحميل جميع كتب مناهج اليمن الدراسية  
بروابط تحميل مباشرة . اضغط هنا

بعد الاتصال بالإنترنت، من أدناه، انقر على الكتب المراد تحميلها، سوف تفتح صفحة في الموقع تحتوي على جميع كتب الصف المراد تحميله، بروابط مباشرة:

[كتب الصف السابع الأساسي pdf](#)

[كتب الصف الثامن الأساسي pdf](#)

[كتب الصف التاسع الأساسي pdf](#)

[كتب الصف الأول الثانوي pdf](#)

[كتب الصف الثاني الثانوي pdf](#)

[كتب الصف الثالث الثانوي pdf](#)

[كتب الصف الأول الأساسي pdf](#)

[كتب الصف الثاني الأساسي pdf](#)

[كتب الصف الثالث الأساسي pdf](#)

[كتب الصف الرابع الأساسي pdf](#)

[كتب الصف الخامس الأساسي pdf](#)

[كتب الصف السادس الأساسي pdf](#)

[كتب أدلة المعلم اليمني pdf](#)

\*\*\*\*\*

كتب أخرى قد تهتمك:

[كتب الحساب الذهني السريع pdf](#)

[قصص علمية للأطفال pdf](#)

[كتب أساسيات الرياضيات pdf](#)

[كتب علمية للأطفال pdf](#)

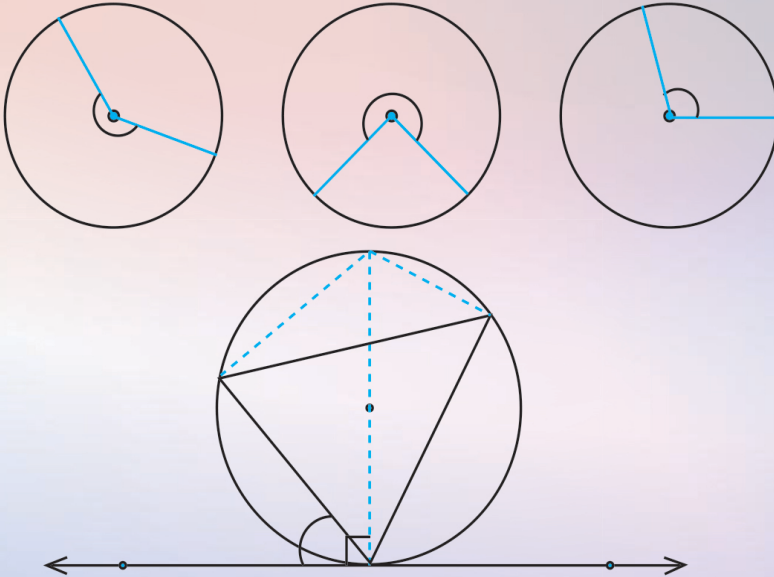


الجمهورية العربية السورية  
وزارة التربية والتعليم  
قطاع المناهج والتوجيه  
الإدارة العامة للمناهج

# الرياضيات

للفيف التاسع من مرحلة التعليم الأساسي

(الجزء الثاني)



حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم  
٢٠١٤ / ١٤٣٥ م





الجمهورية العربية السورية  
وزارة التربية والتعليم  
قطاع المناهج والتوجيه  
الإدارة العامة للمناهج

# الرياضيات

للفصل التاسع من مرحلة التعليم الأساسي

(الجزء الثاني)

## فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش (رئيساً).

- |                                    |                               |
|------------------------------------|-------------------------------|
| د. محمد عبد الرب محمد بشر.         | د. أمة الإله علي حُمد الحوري. |
| د. علي شاهر نعمان القرشي.          | د. ردمان محمد سعيد.           |
| د. محمد رشاد الكوري.               | د. منصور علي صالح عطاء.       |
| د. عبدالله سلطان عبدالغني الصلاحي. | أ. مريم عبدالجبار سلمان.      |
| أ. سالمين محمد باسلوم.             | د. محمد علي مرشد.             |
| أ. ذا النون سعيد طه.               | أ. يحيى بكار مصطفى.           |
| أ. مصطفى عبد الواحد العبسي.        | أ. عبدالباري طه حيدر.         |
| أ. جميلة إبراهيم أحمد.             | أ. عبده أحمد سيف.             |
| أ. أحمد سالم باحويرث.              | د. علي عبدالواحد.             |

## فريق المراجعة:

- |                                       |                       |
|---------------------------------------|-----------------------|
| أ. جميلة إبراهيم الرازي.              | أ. شرف عثمان الخامري. |
| أ. تهاني سعيد الحكيمي.                | أ. مختار حيدر هزاع.   |
| تنسيق: أ / سعيد محمد ناجي الشرعبي.    |                       |
| تدقيق: د / أمة الإله علي حُمد الحوري. |                       |
| إشراف: د / عبدالله سلطان الصلاحي.     |                       |

## الإخراج الفني

- |                   |                         |
|-------------------|-------------------------|
| الصف والتصميم :   | جلال سلطان علي إبراهيم. |
| إدخال التصويبات : | علي عبدالله علي السلفي. |

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني.

٢٠١٥م / ١٤٣٦هـ



المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

### أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

- |                                |                              |
|--------------------------------|------------------------------|
| د. عبدالله عبده الحامدي.       | أ/ علي حسين الحيمي.          |
| د/ صالح ناصر الصوفي.           | د/ أحمد علي المعمري.         |
| أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.      | أ.د/ صالح عوض عرم.           |
| أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.    | د/ إبراهيم محمد الحوثي.      |
| د/ عبدالله علي أبو حورية.      | د/ شكيب محمد باجرش.          |
| د/ عبدالله لمّس.               | أ.د/ داوود عبدالملك الحدابي. |
| أ/ منصور علي مقبل.             | أ/ محمد هادي طواف.           |
| أ/ أحمد عبدالله أحمد.          | أ.د/ أنيس أحمد عبدالله طائع. |
| أ.د/ محمد سرحان سعيد المخلافي. | أ/ محمد عبدالله زيارة.       |
| أ.د/ محمد حاتم المخلافي.       | أ/ عبدالله علي إسماعيل.      |
| د/ عبدالله سلطان الصلاحي.      |                              |

قررت اللجنة العليا للمناهج طباعة هذا الكتاب .

## تقديم :

في إطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية .

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات .

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها: الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبما يتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي .

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها .

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدرسة لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية .

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول

وزير التربية والتعليم

رئيس اللجنة العليا للمناهج

## بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

### المقدمة:

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خاتم النبيين ، وآله وصحبه أجمعين .

لقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المناهج التعليمية لمرحلة التعليم الأساسي وفق أسس علمية وتربوية . وبعد كتاب الصف الثامن يأتي كتاب الصف التاسع لمواكبة هذا التطوير .

وفي هذا الكتاب يجد أبناؤنا الطلبة مادة الرياضيات معروضة لهم بأساليب وقوالب جديدة تساعدهم على سرعة الفهم والاستيعاب ، وتسهل لهم التعامل مع المادة وتحفزهم على حبها ، كما تنمي فيهم القدرات التفكيرية وتوسع ثقافتهم العلمية .

إن الكتاب غني بالشرح والأمثلة إلى جانب الأنشطة والتدريبات لكل درس، والتمارين العامة لكل وحدة دراسية ، ولذا على أبنائنا الطلبة بذل أقصى جهودهم والاستفادة من توجيهات المدرسين ، والدراسة المتعمنة للمادة المقدمة وتتبعها بدقة وحل أكبر قدر من التمارين والمسائل ، وهذا من شأنه ترسيخ المعرفة الرياضية في أذهانهم وإكسابهم المهارات الكافية للاستمرار في التعليم .

وفي هذا الكتاب نقدم لأبنائنا الطلبة مادة الرياضيات بأسلوب واضح سهل يتناسب ومستويات الطلبة وقدراتهم وبدقة علمية مع مراعاة جوانبها التربوية، ولذا تضمنت وحدات الكتاب تعاريف رياضية دقيقة ولكنها مبسطة ، واحتوت على برهنة رياضية ولكنها متدرجة . وترابطت المواضيع في بناء منطقي متسلسل يساعد أبنائنا على التقدم الراسخ في تعلم المادة كما تم تقديم المادة بلغة مبسطة شيقة ومدعومة بالأشكال والتوضيحات الكافية ترغيباً لهم في المادة ، وعلى طريق تحقيق الطموح العلمي المنشود .

والله وراء القصد وهو ولي التوفيق ،،،

المؤلفون

## المحتويات

الموضوع	الصفحة
<b>الوحدة الخامسة : الهندسة</b>	
١-٥ الدائرة	٧
٢-٥ العمود النازل من مركز الدائرة على الوتر	١٠
٣-٥ أوتار الدائرة	١٦
٤-٥ الزاوية المركزية والأقواس	٢٢
٥-٥ القطاع الدائري	٢٧
٦-٥ الزاوية المحيطية	٣٠
٧-٥ الشكل الرباعي الدائري	٣٦
٨-٥ المماس	٤٣
٩-٥ الأوضاع النسبية لدائرتين	٥٢
١٠-٥ تمارين ومسائل عامة	٦١
١١-٥ اختبار الوحدة	٦٣
<b>الوحدة السادسة : الهندسة الإحداثية والتحويلات</b>	
١-٦ البعد بين نقطتين	٦٥
٢-٦ تنصيف قطعة مستقيمة	٦٩
٣-٦ الانعكاس	٧٣
٤-٦ الانسحاب	٨٤
٥-٦ الدوران	٩٠



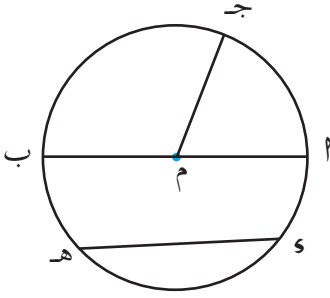
## تابع المحتويات

الصفحة	الموضوع
٩٧	٦-٦ التكبير
١٠٦	٧-٦ تمارين عامة ومسائل
١٠٩	٨-٦ اختبار الوحدة

### الوحدة السابعة : الإحصاء

١١١	١-٧ المتوسط الحسابي
١٢٠	٢-٧ المنوال
١٢٣	٣-٧ التكرار المتجمع
١٢٩	٤-٧ الوسيط
١٣٨	٥-٧ تمارين ومسائل عامة
١٤٠	٦-٧ اختبار الوحدة

## ٥ : ١ الدائرة



شكل (٥ - ١)

تأمل الشكل (٥ - ١):

تعرفت سابقاً على الدائرة وعلى

مسميات بعض عناصرها .

نسمي النقطة « م » مركز الدائرة ،

$\overline{AB}$  قطر الدائرة ،  $\overline{JM}$  وتر الدائرة ،

$\overline{AM}$  ،  $\overline{MB}$  ،  $\overline{JM}$  أنصاف أقطار الدائرة ،

تلاحظ أن  $|AM| = |MB| = |JM|$  .

## تعريف:

**الدائرة :** هي مجموعة نقاط في مستوى واحد تبعد عن نقطة ثابتة

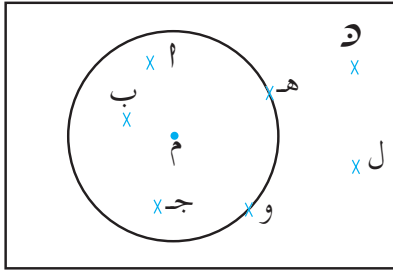
مسافات متساوية، وتسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ، وتسمى الدائرة

باسم مركزها .

**نصف قطر الدائرة :** هو القطعة المستقيمة الواصلة من مركز الدائرة

إلى أي نقطة تقع على الدائرة ، ونرمز لطول نصف القطر بالرمز « نق » .

تأمل الشكل ( ٥ - ٢ ) .. تلاحظ أن



شكل ( ٥ - ٢ )

الدائرة تقسم المستوى إلى ثلاثة أجزاء هي :

**الجزء الأول :** داخل الدائرة ، النقاط مثل

أ ، ب ، ج تقع داخل الدائرة ،

**الجزء الثاني :** على الدائرة ، النقاط مثل هـ ، و

تقع على الدائرة ،

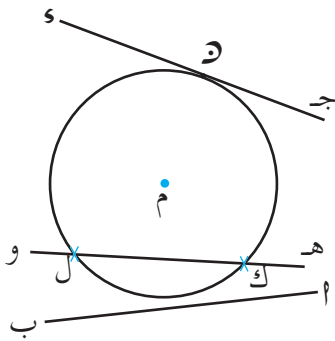
**الجزء الثالث :** خارج الدائرة ، النقاط مثل ز ، ح ، ط تقع خارج الدائرة .

### الأوضاع النسبية لدائرة ومستقيم :

تأمل الشكل ( ٥ - ٣ ) :

ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن :



شكل ( ٥ - ٣ )

( ١ ) المستقيم  $أ ب$  ، والدائرة  $م$  لا يتقاطعان ،

$$\Phi = م \cap \overleftrightarrow{أ ب}$$

$\therefore$   $أ ب$  يقع خارج الدائرة .

( ٢ )  $\overleftrightarrow{ج د}$  يمس الدائرة  $م$  في نقطة واحدة هي النقطة  $د$  .

$$\{ د \} = م \cap \overleftrightarrow{ج د}$$

نسمي  $\overleftrightarrow{ج د}$  مماساً للدائرة ، ونسمي  $د$  نقطة التماس .

( ٣ )  $\overleftrightarrow{هـ و}$  يقطع الدائرة في نقطتين هما  $ك$  ،  $ل$  ،

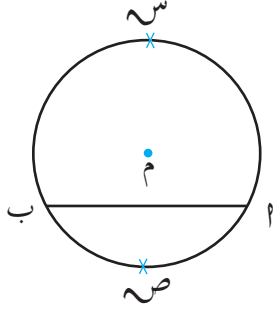
$$\{ ل ، ك \} = م \cap \overleftrightarrow{هـ و}$$

نسمي  $ك ل$  وترًا ،  $\overleftrightarrow{هـ و}$  قاطعاً للدائرة .

تذكر أن :

وتر الدائرة : هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين من الدائرة .

القوس : هو جزء من الدائرة محصور بين نقطتين عليها .



شكل ( ٤ - ٥ )

في الشكل ( ٤ - ٥ ) لدينا قوسان

هما القوس الأكبر ونرمز له بالرمز  $\widehat{AB}$  س ب .القوس الأصغر ونرمز له بالرمز  $\widehat{AB}$  ص ب .كما نلاحظ أن الوتر  $AB$  يقسم الدائرةإلى قطعتين : القطعة الكبرى ( $\widehat{AB}$  س ب )والقطعة الصغرى ( $\widehat{AB}$  ص ب ) .

## تمارين ومسائل

[ ١ ] أوجد قطر الدائرة إذا كان نصف قطرها :

( أ ) ٥ سم ( ب ) ٢٠ سم ( ج )  $\frac{1}{2}$  سم ٣ سم .

[ ٢ ] أوجد نصف قطر الدائرة إذا كان قطرها :

( أ ) ١٣ سم ( ب ) ١٠,٥ سم ( ج ) ٢,٦ سم .

[ ٣ ] أوجد نصف قطر الدائرة إذا كان طول أكبر وتر فيها ١٦ سم .

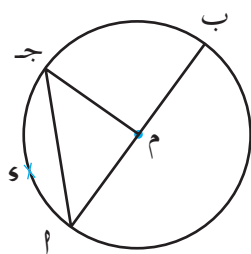
[ ٤ ] في الشكل ( ٥ - ٥ ) :

دائرة مركزها م ، سم ما يلي :

( أ ) قطراً للدائرة ، ( ب ) وترين للدائرة ،

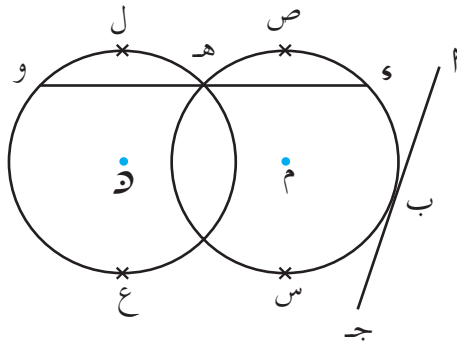
( ج ) ثلاثة أنصاف أقطار للدائرة ،

( د ) أربعة أقواس ، ( هـ ) قطعتان .



شكل ( ٥ - ٥ )

[ ٥ ] ارسم دائرتين مركزهما نقطة  $١$  ، وطول نصف قطر إحداهما  $٣$  سم وطول نصف قطر الأخرى  $٤,٥$  سم ، ثم ارسم القطر  $\overline{ب ج}$  في الدائرة الكبرى ، عيّن  $س$  ،  $ص$  نقطتي تقاطع  $\overline{ب ج}$  مع الدائرة الصغرى ، أوجد  $|ب ج|$  ،  $|ب ص|$  ،  $|ب س|$  .



شكل (٥ - ٦)

[ ٦ ] في الشكل (٥ - ٦) : دائرتان

مركزهما (  $م$  ،  $د$  ) ، لاحظ أن

$\overleftrightarrow{ب ج}$  خارج  $د$  ، سمّ ما يلي :

(  $١$  ) مماساً للدائرة  $م$  ،

(  $ب$  ) نقطة التماس ،

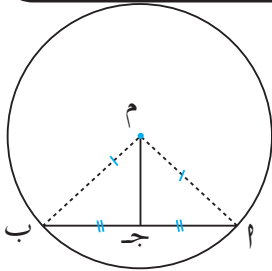
(  $ج$  ) وترين للدائرتين ،

(  $س$  ) أربعة أقواس للدائرتين .

## ٥ : ٢ العمود النازل من مركز الدائرة على الوتر

مبرهنة (٥ - ١) :

المستقيم الواصل من مركز الدائرة إلى منتصف أي وتر فيها يكون عمودياً على الوتر .



شكل (٥ - ٧)

المعطيات : دائرة مركزها  $م$  ،  $\overline{أ ب}$  وتر

في الدائرة ،  $|أ ج| = |ب ج|$  ،

[ انظر شكل (٥ - ٧) ] .

المطلوب: إثبات أن:  $\overline{م ج} \perp \overline{أ ب}$  .

العمل: نرسم  $\overline{م أ}$ ،  $\overline{م ب}$  .

البرهان:

$\Delta م أ ج$ ،  $\Delta م ب ج$ ، فيهما:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{م ج} \text{ (ضلع مشترك)} \\ |م أ| = |م ب| = |نق| \\ |أ ج| = |ب ج| \text{ (معطى)} \end{array} \right\}$$

$\therefore \Delta م أ ج \cong \Delta م ب ج$

ومن التطابق ينتج أن:

$$\widehat{م ج أ} = \widehat{م ج ب}$$

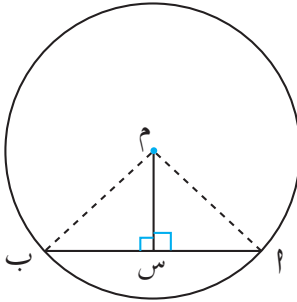
لكن  $\widehat{م ج أ} + \widehat{م ج ب} = 180^\circ$  (زاوية مستقيمة)

$$\therefore \widehat{م ج أ} = \widehat{م ج ب} = 90^\circ$$

$\therefore \overline{م ج} \perp \overline{أ ب}$  وهو المطلوب

عكس المبرهنة (٥ - ١):

العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه.



شكل (٥ - ٨)

المعطيات:  $\overline{أ ب}$  وتر في الدائرة م،

$$\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$$

[ انظر شكل (٥ - ٨) ]

المطلوب: إثبات أن:

$$|م أ| = |م ب| .$$

العمل : نرسم  $\overline{م أ}$  ،  $\overline{م ب}$

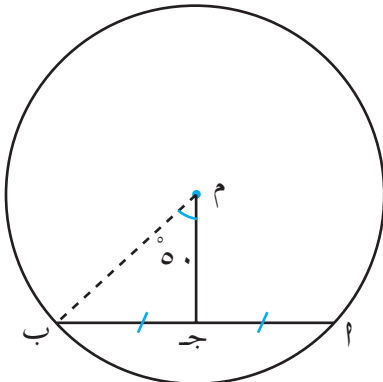
البرهان :

$\Delta م س أ$  ،  $\Delta م س ب$  ، فيهما :

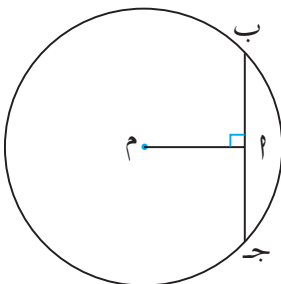
$$\left. \begin{array}{l} |م أ| = |م ب| = |نق| \\ \overline{م س} \text{ (ضلع مشترك)} \\ \sphericalangle م س أ = \sphericalangle م س ب = 90^\circ \text{ (معطى)} \end{array} \right\}$$

$\therefore \Delta م س أ \cong \Delta م س ب$

$\therefore |م أ| = |م ب|$  وهو المطلوب .



شكل (٥ - ٩)



شكل (٥ - ١٠)

### تدريبات

[١] في الشكل (٥ - ٩) :

$\overline{م أ}$  وترفي الدائرة م ،

ج منتصف  $\overline{م ب}$  ،

$\sphericalangle م ج ب = 90^\circ$  و

أوجد  $\sphericalangle م ب ج$  .

[٢] في الشكل (٥ - ١٠) :

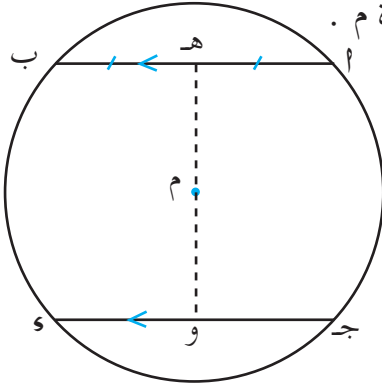
$\overline{م ج}$  وترفي الدائرة م ،

$\overline{م أ} \perp \overline{م ب ج}$  ،  $|م أ| = ٣$  سم

أوجد  $|م ب ج|$  .

## مثال (١)

في الشكل (٥ - ١١) :  $\overline{AB}$ ،  $\overline{CD}$  وتران متوازيان في الدائرة م ، ه منتصف  $\overline{AB}$ ، ه م يقطع  $\overline{CD}$  في و ، اثبت أن و منتصف  $\overline{CD}$  .



شكل (٥ - ١١)

المعطيات :  $\overline{AB}$ ،  $\overline{CD}$  وتران متوازيان في الدائرة م .

$$|AH| = |HB|$$

المطلوب : إثبات أن :  $|CW| = |WD|$  .

البرهان :

$$|AH| = |HB| \text{ ( معطى )}$$

$$\therefore M \text{ ه } \perp \overline{AB} \text{ ( مبرهنة )}$$

$$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ ( معطى )}$$

$$\therefore \angle A \text{ ه } + (\angle \text{ه و ج}) = 180^\circ \text{ ( حقيقة )}$$

$$\therefore \angle \text{ه و ج} = 90^\circ$$

$$\therefore M \text{ و } \perp \overline{CD}$$

$$\therefore |CW| = |WD|$$

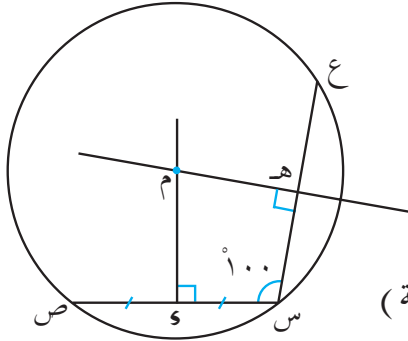
وهو المطلوب .

## مثال (٢)

$\overline{S_1S_2}$  ،  $\overline{S_1C}$  وتران في الدائرة م ،  $\angle \text{ع س ص} = 100^\circ$  ،  $\text{ه}$  ،

منتصف  $\overline{S_1S_2}$  ،  $\overline{S_1C}$  على الترتيب . أوجد  $\angle \text{س م ه}$  .



**الحل:**


وبالمثل  $\widehat{H} = (\angle MHS) = 90^\circ$  (مبرهنة) شكل (5-12)

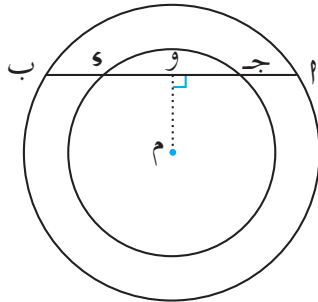
$$\widehat{H} + \widehat{G} + \widehat{S} + \widehat{M} = 360^\circ \Rightarrow 90^\circ + 100^\circ + 90^\circ + \widehat{M} = 360^\circ$$

(مجموع زوايا الشكل الرباعي هـ م س ج)

$$\therefore \widehat{M} = 360^\circ - (90^\circ + 100^\circ + 90^\circ) = 80^\circ$$

$$80^\circ = 280^\circ - 360^\circ =$$

$$\therefore \widehat{M} = 80^\circ$$



شكل (5-13)

مثال (3) في الشكل (5-13): وتر  $\overline{AB}$  وتر

في الدائرة الكبرى (م)، يقطع الدائرة

الصغرى (م)، في النقطتين ج، س،

أثبت أن  $|AB| = |CD|$ .

المعطيات:  $\overline{AB}$  يقطع الدائرة الصغرى في النقطتين ج، س،

المطلوب: إثبات أن:  $|AB| = |CD|$ .

العمل: نرسم  $\overline{MS} \perp \overline{AB}$

البرهان:

في الدائرة الكبرى (م):

∴  $\overline{م} \perp \overline{أب}$  ( عملا )

∴  $|أو| = |وب|$  ..... ( ١ ) ( عكس المبرهنة )

في الدائرة الصغرى ( م ) :

∴  $\overline{م} \perp \overline{جـد}$

∴  $|وجـ| = |ودـ|$  ..... ( ٢ ) ( عكس المبرهنة )

ب طرح ( ٢ ) من ( ١ ) ينتج أن :

$|أجـ| = |أدـ|$  وهو المطلوب .

### تمارين ومسائل

[ ١ ]  $\overline{أب}$  وتر في دائرة مركزها م ،  $\overline{م} \perp \overline{جـد}$  ،  $|م جـ| = ٦$  سم ،

نق = ١٠ سم ، احسب  $|أب|$  .

[ ٢ ]  $\overline{أب}$  وتر في دائرة مركزها م ، س منتصف  $\overline{أب}$  ، فإذا عُلِمَ أن

$|أس| = ٣$  سم ،  $|سم| = ٤$  سم ، احسب طول نصف القطر .

[ ٣ ]  $\overline{أب}$  ،  $\overline{أجـد}$  وتران في الدائرة م ، وه (  $\times$  ب أ جـ ) =  $٧٥$  ،  $س$  ، هـ ،

منتصف  $\overline{أب}$  ،  $\overline{أجـد}$  على الترتيب ، أوجد وه (  $\times$  و م هـ ) .

[ ٤ ] في الشكل ( ١٤ - ٥ ) :

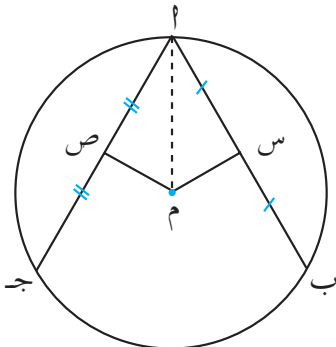
$\overline{أب}$  ،  $\overline{أجـد}$  وتران متطابقان في الدائرة م ،

س منتصف  $\overline{أب}$  ، ص منتصف  $\overline{أجـد}$  ،

فإذا كان وه (  $\times$  ب أ جـ ) =  $٦٠$  ،

احسب وه (  $\times$  س م أ ) ،

وه (  $\times$  س م ص ) المنعكسة .



شكل (١٤ - ٥)

[٥]  $\overline{أب}$ ،  $\overline{جـد}$  وتران متوازيان في الدائرة م، هـ منتصف  $\overline{أب}$ ، رسم هـ م فقطع  $\overline{جـد}$  في و، أثبت أن:  $|و جـ| = |و د|$ .

[٦] م، د دائرتان متقاطعتان في أ، ب، نصف خط المركزين م د في ج ثم وصل  $\overline{جـأ}$ ، رسم المستقيم أ و عموداً على  $\overline{أ جـ}$ ، يقطع محيط الدائرة م في و، ومحيط الدائرة د في هـ. أثبت أن  $|أ و| = |أ هـ|$ .

[٧]  $\overline{أب}$  وتر في دائرة مركزها م فيه و هـ ( $\sphericalangle م أ ب = ٤٨^\circ$ )، نُصِّف زاوية م أ ب بالمستقيم أ و فلاقى محيط الدائرة في نقطة و ثم نُصِّف الوتر  $\overline{أب}$  في ج، وصل م جـ.

أولاً: أوجد قياس الزاوية م و أ بالدرجات

ثانياً: أثبت أن  $\overline{م و} \parallel \overline{أ ب}$

ثالثاً: أثبت أن و هـ ( $\sphericalangle م و جـ = ٩٠^\circ$ ).

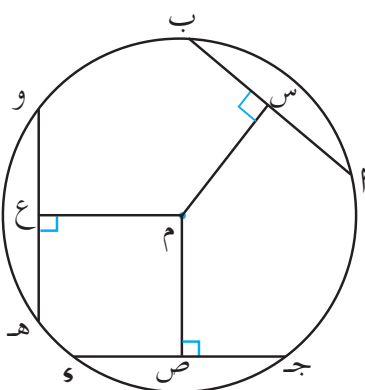
### ٥ : ٣ أوتار الدائرة

تأمل الشكل (٥-١٥) : ماذا تلاحظ؟

تلاحظ أن :

$\overline{أب}$ ،  $\overline{جـد}$ ، هـ و ثلاثة أوتار متطابقة في

الدائرة م،  $\overline{أب}$  يبعد عن مركز الدائرة مسافة قدرها  $|م س|$ ،  $\overline{جـد}$  يبعد عن مركز الدائرة مسافة قدرها  $|م ص|$ ، هـ و يبعد عن مركز الدائرة مسافة قدرها  $|م ع|$ ،

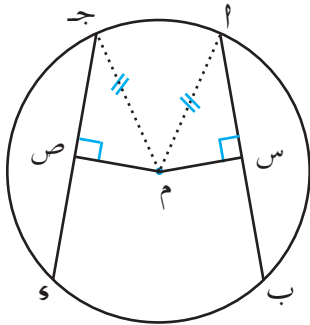


شكل (٥-١٥)

هل هناك علاقة بين طول الوتر وبعده عن مركز الدائرة ؟  
أوجد أطوال الأوتار الثلاثة وأبعادها عن مركز الدائرة ، ثم قارن ؟ ماذا  
تستنتج ؟ تلاحظ أن :  
هناك علاقة بين طول الوتر وبعده عن مركز الدائرة ، وعليه يمكن استنتاج المبرهنة التالية :

### مبرهنة ( ٥ - ٢ ) :

الأوتار المتطابقة في الدائرة على أبعاد متساوية عن مركزها .



شكل ( ٥ - ١٦ )

المعطيات :  $\overline{AB}$  ،  $\overline{CD}$  وتران في الدائرة م ،  
 $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$  ،  $M \perp \overline{CD}$  ،  
م  $\overline{AS} \perp \overline{AB}$  [ انظر شكل ( ٥ - ١٦ ) ] .  
المطلوب : إثبات أن :  $|\overline{MS}| = |\overline{MT}|$  .  
العمل : نرسم م  $\overline{AT}$  ، م  $\overline{CT}$  .

البرهان :

$$\therefore M \overline{AS} \perp \overline{AB} \quad \therefore |\overline{AS}| = \frac{1}{2} |\overline{AB}| \quad (\text{عكس مبرهنة}).$$

$$\therefore M \overline{CT} \perp \overline{CD} \quad \therefore |\overline{CT}| = \frac{1}{2} |\overline{CD}| \quad (\text{عكس مبرهنة}).$$

$$\therefore |\overline{AS}| = |\overline{CT}| \quad \therefore |\overline{MS}| = |\overline{MT}| .$$

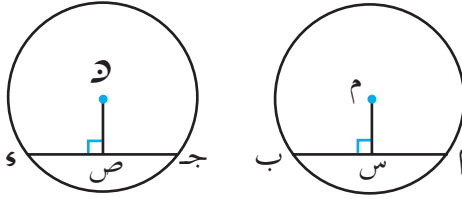
$\therefore \Delta \overline{AS} M \cong \Delta \overline{CT} M$  ، جـ ص م فيهما :

$$\left. \begin{array}{l} |\overline{AS}| = |\overline{CT}| \\ |\overline{MS}| = |\overline{MT}| \end{array} \right\} \text{ (برهاناً)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle \overline{AS} M = \sphericalangle \overline{CT} M \\ \sphericalangle \overline{MS} M = \sphericalangle \overline{MT} M \end{array} \right\} \text{ (معطى)}$$

$\therefore \Delta \overline{AS} M \cong \Delta \overline{CT} M$  ،

منه ينتج أن :  $|\overline{MS}| = |\overline{MT}|$  وهو المطلوب .



شكل (٥ - ١٧)

### نتيجة :

في الشكل (٥ - ١٧) :

الدائرتان م ، و متطابقتان

(أي أن  $|م| = |و|$  ،  $|ج-و| = |ب-س|$  ) ،

$|ب| = |و|$  ،  $|ج-و| = |ب-س|$  ،  $و \perp ج-و$  ،

$\therefore |م| = |س|$  .

### عكس المبرهنة (٥ - ٢) :

الأوتار التي على أبعاد متساوية عن مركز الدائرة تكون متطابقة.

#### مثال (١)

دائرتان متحدتان في المركز م ، رسم  $أب$  وترّاً في الدائرة الكبرى فقطع

الدائرة الصغرى في ج ، و ، ورسم  $سص$  وترّاً في الدائرة الكبرى فقطع الدائرة

الصغرى في ع ، ل إذا كان  $|ب| = |س|$  ، فأثبت أن :  $|ج-و| = |ع-ل|$  .

المعطيات :  $أب$  يقطع الدائرة الصغرى في ج ، و ،

$سص$  يقطع الدائرة الصغرى في ع ، ل ،  $|ب| = |س|$  .

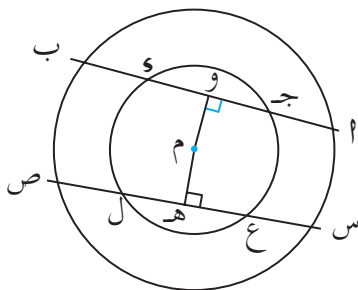
المطلوب : إثبات أن :  $|ج-و| = |ع-ل|$  .

العمل : نرسم  $م و \perp أ ب$  ،

$م هـ \perp س ص$

[ انظر الشكل (٥ - ١٨) ] ،

البرهان : في الدائرة الكبرى :



شكل (٥ - ١٨)

$$\therefore |AB| = |CS| \text{ (معطى)}$$

$$\therefore \overline{MO} \perp \overline{AB}, \overline{MH} \perp \overline{CS} \text{ (عملاً)}$$

$$\therefore |MO| = |MH| \text{ (مبرهنة)}$$

في الدائرة الصغرى

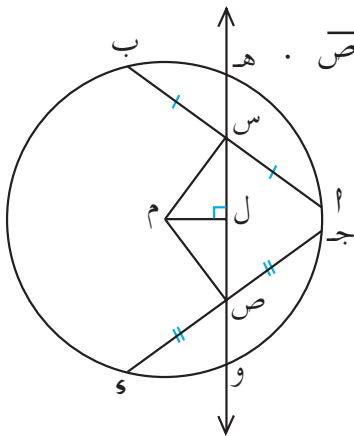
$$\therefore |MO| = |MH| \text{ (برهاناً)}$$

$$\therefore \overline{MO} \perp \overline{JW}, \overline{MH} \perp \overline{EL} \text{ (عملاً)}$$

$$\therefore |JW| = |EL| \text{ (عكس المبرهنة) وهو المطلوب.}$$

### مثال (٢)

في الشكل (٥ - ١٩) وتران متساويان في الطول في الدائرة م ، والنقطتان س ، ص منتصفا  $\overline{AB}$  ،  $\overline{JW}$  على الترتيب ، رسم  $\overleftrightarrow{SV}$  فقطع الدائرة في هـ ، و ، برهن أن  $|SH| = |CV|$  .  
المعطيات:  $|AB| = |JW|$  ، س منتصف  $\overline{AB}$  ، ص منتصف  $\overline{JW}$  .  
المطلوب: إثبات أن  $|SH| = |CV|$  .  
العمل: نسقط  $\overline{ML} \perp \overleftrightarrow{SV}$  ، ونرسم  $\overline{MS}$  ،  $\overline{MV}$  .  
البرهان:



شكل (٥ - ١٩)

$$\therefore \overline{ML} \perp \overline{HW}$$

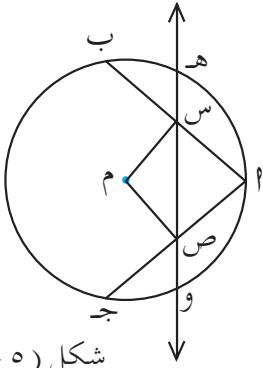
$$\therefore |HL| = |LV| \text{ (١) ،}$$

$$\therefore \text{س منتصف } \overline{AB} \text{ (معطى)}$$

$$\therefore \overline{MS} \perp \overline{AB} ،$$

$$\therefore \text{ص منتصف } \overline{JW} \text{ (معطى).}$$



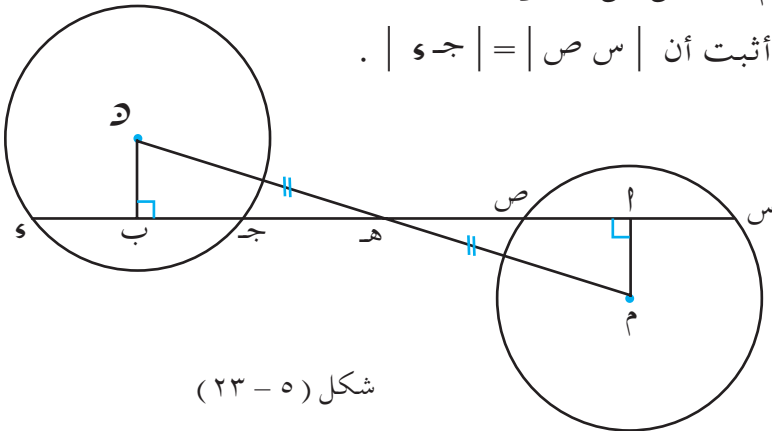


شكل (٥-٢٢)

[٤] في الشكل ( ٥ - ٢٢ ) :  
 $\overline{AB}$  ،  $\overline{AJ}$  وتران متطابقان  
 في الدائرة م ، س ، ص منتصفا  
 $\overline{AB}$  ،  $\overline{AJ}$  على الترتيب ،  
 رسم س ص فقطع الدائرة في هـ ، و ،  
 أثبت أن  $|س هـ| = |ص و|$  .

[٥]  $\overline{AB}$  جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م ؛ فيه  $|AB| = |AJ|$  ، رسم  
 $\overline{MS} \perp \overline{AB}$  يقطعه في س ، ورسم  $\overline{MV} \perp \overline{AJ}$  يقطعه في ص فإذا  
 كان  $|AM| = ٥$  سم ،  $|ص جـ| = ١٢$  سم ، أوجد طول نصف قطر  
 الدائرة م .

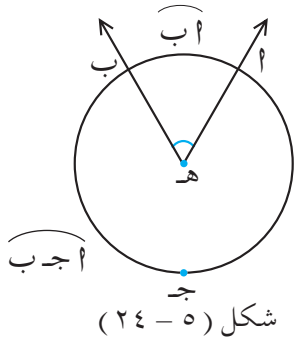
[٦] في الشكل ( ٥ - ٢٣ ) : م ، و مركزا دائرتين متطابقتين وغير  
 متقاطعتين نصف م و في هـ ورسم المستقيم س ص جـ يمر بالنقطة  
 هـ ويقطع الدائرة م في س ، ص وقطع الدائرة و في جـ ، و ، حيث  
 $\overline{MA} \perp \overline{SV}$  ،  $\overline{WB} \perp \overline{JW}$  .  
 أثبت أن  $|س ص| = |جـ و|$  .



شكل (٥-٢٣)



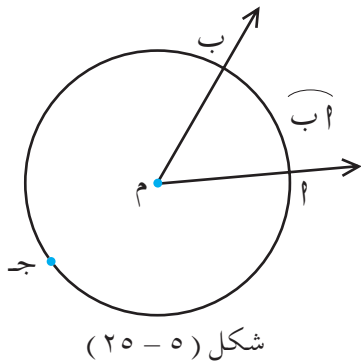
## ٥ : ٤ الزاوية المركزية والأقواس



في الشكل (٥ - ٢٤) : الشعاعان هـ أ ، هـ ب الخارجان من مركز الدائرة هـ ، يشكلان زاوية تُسمى زاوية مركزية ، وعليه فإن :

**الزاوية المركزية : هي زاوية رأسها مركز الدائرة .**

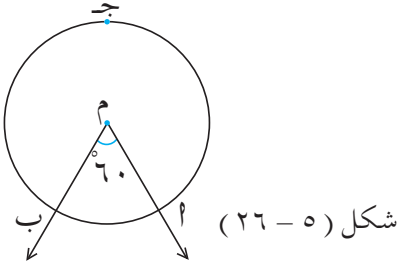
إذا تأملنا في الشكل أعلاه نلاحظ أن الزاوية المركزية هـ أ هـ ب تقسم الدائرة إلى قوسين القوس هـ أ ب ويسمى القوس الصغير أو القوس المقطوع ويرمز له بالرمز  $\widehat{أ ب}$  . القوس أ ج ب ويسمى بالقوس الكبير ويقرأ بثلاثة أحرف تمييزاً له عن القوس الصغير ، ويرمز له بالرمز  $\widehat{أ ج ب}$  .



في الشكل (٥ - ٢٥) : نلاحظ أن النقطتين أ ، ب قد قسمت الدائرة إلى قوسين صغيراً وكبيراً ، وعند رسم الشعاعين م أ ، م ب نحصل على زاويتين مركبتين هما  $\times$  أ م ب وقوسها  $\widehat{أ ب}$  ،  $\times$  م أ ب المنعكسة وقوسها  $\widehat{ب أ ج}$  .

**درجة قياس القوس :**

**درجة قياس القوس الصغير تساوي قياس زاويته المركزية المقابلة له .**



في الشكل (٥ - ٢٦) : إذا كانت  
 $\angle م ب أ = 60^\circ$   
 فإننا نقول أن درجة قياس قوسها  $60^\circ$  ،

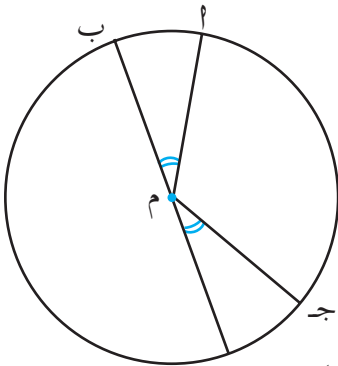
∴ درجة قياس القوس الكبير  $= 360^\circ - 60^\circ$  = درجة قياس القوس الصغير  
 فمثلاً درجة قياس  $\widehat{أ ب}$  في الشكل (٥ - ٢٦)  $= 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

ما درجة قياس قوس نصف الدائرة ؟

**تدريب (١)**

**مبرهنة (٥ - ٣) :**

**إذا تطابقت زاويتان مركزيتان تساوى قياسا قوسيهما الصغيرين .**



شكل (٥ - ٢٧)

المعطيات :  $\angle م ب أ \cong \angle م ج د$  و  $\widehat{أ ب} \cong \widehat{ج د}$   
 [ انظر الشكل (٥ - ٢٧) ] .

المطلوب : إثبات أن :

$$\widehat{أ ب} = \widehat{ج د}$$

البرهان :

قياس  $\widehat{أ ب} = \widehat{أ ب}$  (تعريف)

قياس  $\widehat{ج د} = \widehat{ج د}$  (تعريف)

ولكن  $\angle م ب أ \cong \angle م ج د$  (معطى)

∴ قياس  $\widehat{أ ب} =$  قياس  $\widehat{ج د}$  وهو المطلوب

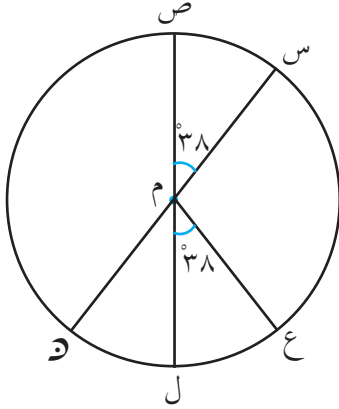
## عكس مبرهنة (٥ - ٣) :

إذا تساوى قياسا قوسين في دائرة تطابقت زاويتاهما المركزيتان .

### تدريب (٢)

برهن عكس المبرهنة (٥ - ٣) .

### مثال (١)



شكل (٥ - ٢٨)

في الشكل (٥ - ٢٨) : م مركز الدائرة،  
أوجد ما يلي :

- ١) قياس  $\widehat{L D}$  (ب) قياس  $\widehat{L N V}$   
ج) قياس  $\widehat{S E}$  (د) قياس  $\widehat{S D E}$

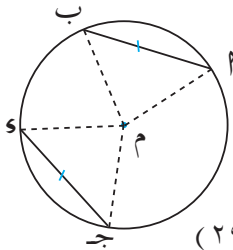
### الحل :

- ١) قياس  $\widehat{L D} = 38^\circ$  لأن  $\widehat{V S} = \widehat{S E} = \widehat{L D}$  (بالتقابل بالرأس)  
ب) قياس  $\widehat{L D V} = 180^\circ$  (نصف دائرة)  
ج) قياس  $\widehat{S E} = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$   
د) قياس  $\widehat{S D E} = 180^\circ + 76^\circ = 256^\circ$

## مبرهنة (٥ - ٤) :

إذا تطابقت الأوتار في دائرة تساوت قياسات أقواسها المتناظرة

المعطيات :



شكل (٥ - ٢٩)

م دائرة فيها :  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

[ انظر الشكل (٥ - ٢٩) ]

المطلوب : إثبات أن :

$$\widehat{قياس\ أ\ ب} = \widehat{قياس\ ج\ د}$$

العمل : نرسم  $\overline{أ\ م}$  ،  $\overline{ب\ م}$  ،  $\overline{ج\ م}$  ،  $\overline{د\ م}$   
البرهان :

$$\therefore |أ\ ب| = |ج\ د| ، |أ\ م| = |ب\ م| ، |أ\ م| = |ب\ م| ، |ج\ م| = |د\ م| \text{ (لماذا؟)}$$

$$\therefore \Delta أ\ م\ ب \cong \Delta ج\ م\ د \text{ (لماذا؟)}$$

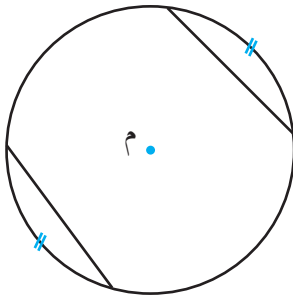
$$\therefore \widehat{أ\ م\ ب} = \widehat{ج\ م\ د}$$

$$\therefore \widehat{قياس\ أ\ ب} = \widehat{قياس\ ج\ د} \text{ وهو المطلوب .}$$

عكس المبرهنة (٥ - ٤) :

إذا تساوت قياسات الأقواس في دائرة تطابقت أوتارها المتناظرة

[ انظر الشكل (٥ - ٣٠) ] .

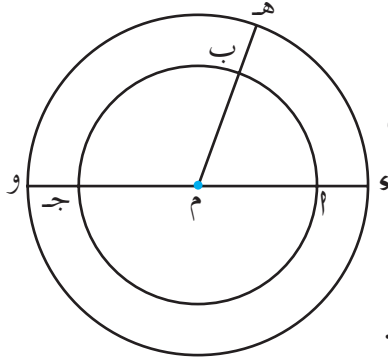


شكل (٥ - ٣٠)

تدريب (٣)

برهن عكس المبرهنة

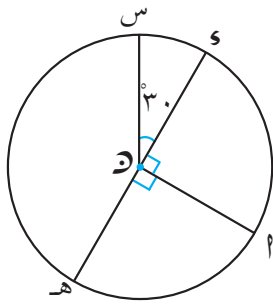
## تمارين ومسائل



شكل (٥ - ٣١)

- [١] في الشكل (٥ - ٣١) دائرتان متحدتا المركز ،  $\overline{AB}$  و  $\overline{CD}$  قطر الدائرة الكبرى ،  $\perp$  و  $MH$  حادة .  
 (أ) سمّ القوس الصغير للدائرة الكبرى .  
 (ب) سمّ قوسين كبيرين للدائرة الصغرى .  
 (ج) أيهما أكبر في القياس  $\widehat{AB}$  أم  $\widehat{CD}$  ؟

- [٢] في الشكل (٥ - ٣٢) : دائرة ، فيها  $\overline{AD} \perp \overline{AE}$  ، وقياس



شكل (٥ - ٣٢)

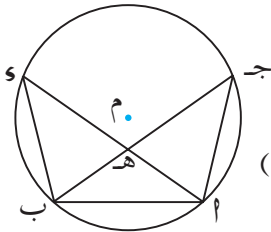
$\widehat{AS} = 30^\circ$  ، أوجد :

(أ) قياس  $\widehat{AS}$

(ب) قياس  $\widehat{SA}$

(ج) قياس  $\widehat{SA}$

(د) قياس  $\widehat{SA}$



شكل (٥ - ٣٣)

- [٣] في الشكل (٥ - ٣٣) :

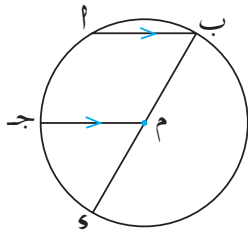
م مركز الدائرة ،  $|AB| = |CD|$

برهن أن :  $|AD| = |BC|$  .

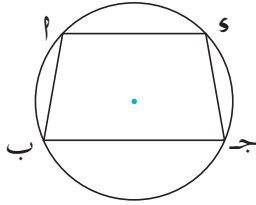
- [٤] في الشكل (٥ - ٣٤) :

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  ،  $\overline{AC}$  قطر الدائرة م ،

أثبت أن : جـ منتصف  $\widehat{AD}$  .



شكل (٥ - ٣٤)



شكل (٣٥ - ٥)

[٥] في الشكل (٣٥ - ٥) :

$$\widehat{PA} \cong \widehat{SA}$$

أثبت أن :  $\overline{AB} \cong \overline{AB}$  .

## ٥ : ٥ القطع الدائري

في الشكل ( ٣٦ - ٥ ) :

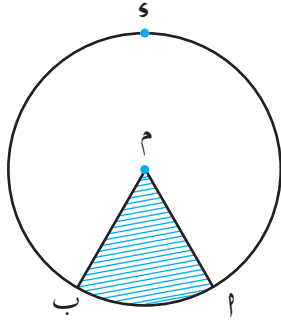
المنطقة المظللة المحددة بالقسوس  $\widehat{AB}$  ،

ونصفي القطرين  $\overline{MA}$  ،  $\overline{MB}$  تسمى بالقطاع

الدائري الصغير . المنطقة غير المظللة

المحددة بالقسوس  $\widehat{AB}$  ونصفي القطرين  $\overline{MA}$  ،

$\overline{MB}$  تسمى بالقطاع الدائري الكبير .



شكل (٣٦ - ٥)

## طول القوس ، ومساحة القطاع :

تأمل القطاع الدائري  $\widehat{AB}$  في

الشكل ( ٣٧ - ٥ ) تلاحظ أن :

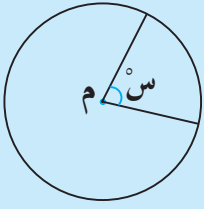
طول القوس  $\widehat{AB} = \frac{37}{360}$  من محيط الدائرة

أي أن طول القوس  $\widehat{AB} = \frac{37}{360} \times$  محيط الدائرة شكل (٣٧ - ٥)

$$\therefore \frac{37}{360} = \frac{\text{طول } \widehat{AB}}{\text{محيط الدائرة}}$$

مساحة القطاع الدائري  $\widehat{AB}$  =  $\frac{37}{360} \times$  مساحة الدائرة .

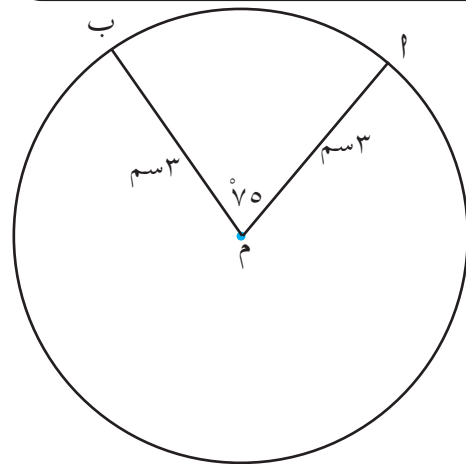
$$\therefore \frac{37}{360} = \frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}}$$



شكل (٥-٣٨)

$$\frac{\text{س}}{360} = \frac{\text{طول القوس}}{2\pi \text{ نق}}$$

$$\frac{\text{س}}{360} = \frac{\text{مساحة القطاع}}{2\pi \text{ نق}^2}$$



شكل (٥-٣٩)

### مثال (١)

مستعيناً بالشكل (٥-٣٩) أوجد:

أ) محيط القطاع الدائري الصغير .

ب) مساحة القطاع الدائري الصغير .

### الحل:

أ) نفرض أن طول أ ب = س سم

$$\frac{70}{360} = \frac{\text{س}}{3 \times \pi \times 2} \quad \therefore$$

$$\therefore \text{س} = \frac{70}{360} \times \pi \times 3 \times 2 = \pi \frac{70}{60} = \pi \frac{7}{6}$$

∴ محيط القطاع = طول القوس + طول القطر .

$$\therefore \text{محيط القطاع الصغير} = 3 + 3 + 3 \frac{13}{14} = 9 \text{ سم}$$

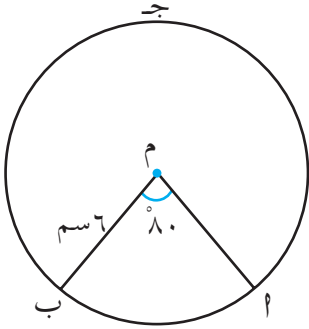
ب) نفرض أن مساحة القطاع الصغير = ص سم<sup>٢</sup> .

$$\frac{70}{360} = \frac{\text{ص}}{23 \times \pi} \quad \therefore$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{70}{360} \times 23 \times \pi = \pi \frac{15}{8} \text{ سم}^2$$

$$\therefore \text{مس}^2 = \frac{25}{28} = \frac{165}{28} = \frac{22}{7} \times \frac{15}{8} =$$

## مثال (٢)



شكل (٥ - ٤٠)

مستعيناً بالشكل (٥ - ٤٠) أوجد :

أ) طول القوس الكبير ٢ ج ب .

ب) مساحة القطاع الدائري الكبير .

## الحل:

أ) نفرض أن طول القوس الكبير = س سم

$$\therefore \frac{80 - 360}{360} = \frac{س}{6 \times \pi \times 6}$$

$$\therefore س = \frac{280}{360} \times 6 \times \pi \times 6 = \frac{280}{360} \times 6 \times \pi \times 6 = س$$

ب) نفرض أن مساحة القطاع الدائري الكبير = م سم<sup>٢</sup>

$$\therefore \frac{80 - 360}{360} = \frac{م}{6 \times \pi \times 6}$$

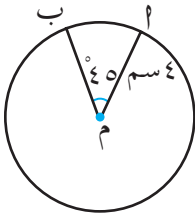
$$\therefore م = \frac{280}{360} \times 6 \times \pi \times 6 = م$$

## تمارين ومسائل

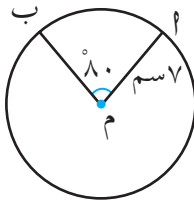
[ ١ ] أوجد كلاً من : أ) محيط القطاع الدائري الصغير .

ب) مساحة القطاع الدائري الصغير .

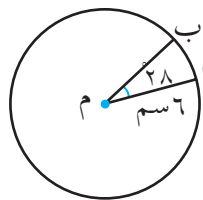
في كل من الأشكال ( ٥ - ٤١ ، ب ، ج ، د ، هـ ) ، ( ط = ١٤ ، ٣ )



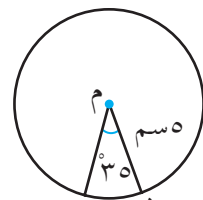
شكل (٥ - ٤١ أ)



شكل (٥ - ٤١ ب)



شكل (٥ - ٤١ ج)

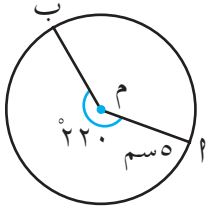


شكل (٥ - ٤١ د)

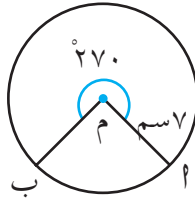


[ ٢ ] أوجد محيط ومساحة القطاع الدائري الكبير في كل من

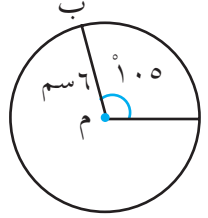
الأشكال (٥ - ١٤٢ ، ب ، ج ، د ، هـ) ، ( ط =  $\frac{٢٢}{٧}$  ) .



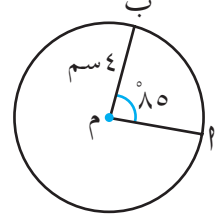
شكل (٥ - ١٤٢)



شكل (٥ - ١٤٢ ج)

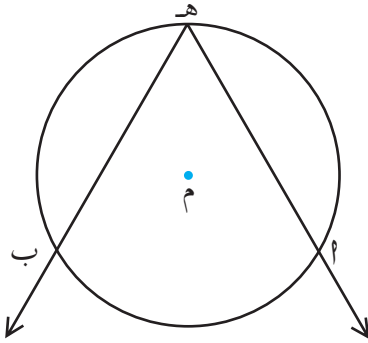


شكل (٥ - ١٤٢ ب)



شكل (٥ - ١٤٢)

## ٥ : ٦ الزاوية المحيطية



شكل (٥ - ١٤٣)

تأمل الشكل (٥ - ١٤٣) ، هـ نقطة

على محيط الدائرة ( م ) ، هـ أ ، هـ ب ← ←

شعاغان يقطعان محيط الدائرة في أ ، ب ،

وبذلك تكونت لدينا زاوية هي  $\angle$  هـ ب ،

مثل هذه الزاوية تسمى زاوية محيطية .

**تعريف :**

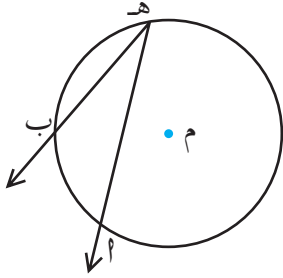
الزاوية المحيطية : هي زاوية يقطع ضلعاها قوساً من الدائرة ، ورأسها نقطة على محيط الدائرة .

من الشكل يلاحظ أن الزاوية المحيطية تقسم الدائرة إلى قوسين أحدهما

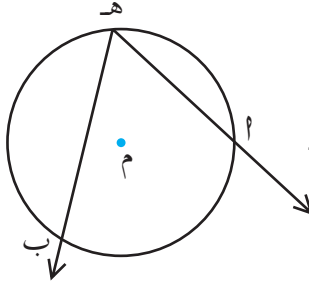
القوس المقابل للزاوية ويسمى قوس الزاوية المحيطية ، والآخر القوس المعكوس

للزاوية ويسمى القوس المعكوس للزاوية المحيطية .

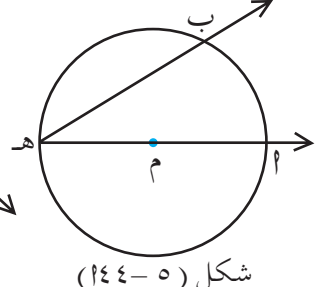
الأشكال (٥-٤٤، ب، ج) تبين حالات مركز الدائرة بالنسبة للزاوية المحيطية.



شكل (٥-٤٤ ج)



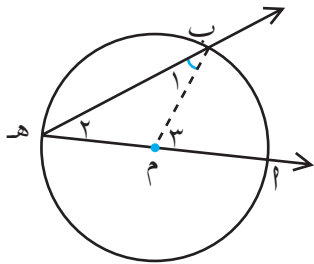
شكل (٥-٤٤ ب)



شكل (٥-٤٤ ا)

### نشاط (١)

ادرس الشكل (٥-٤٥)، ثم أجب عن الأسئلة التالية :



شكل (٥-٤٥)

١- هل م ه ب مثلث متساوي الساقين ؟

ب- هل العبارات الآتية صحيحة ؟

$$(١) \text{ و } (٣) = (١) \text{ و } (٢) + (٢) \text{ و } (٢)$$

$$(٢) \text{ و } (١) = (٢) \text{ و } (٢)$$

$$(٣) \text{ و } (٢) = (٣) \text{ و } (٢)$$

ج- إذا كانت الإجابة في (٣) صحيحة، هل أنت مقتنع أن

$$\text{قياس } \angle \text{ه ب} = \frac{1}{2} \text{ قياس } \angle \text{ا ب} \text{ ؟}$$

### نشاط (٢)

ادرس الشكل (٥-٤٦)، ثم أجب

عن الأسئلة التالية :

١- هل و (٢ ه ب)

$$= \text{ و } (٢ ه ب) + \text{ و } (٢ ه ب)$$

ب - هل العبارات الآتية صحيحة ؟

١.  $\widehat{سأ} = \widehat{سأه} = \widehat{سأه} = \widehat{سأه}$  قياس  $\widehat{سأ}$

٢.  $\widehat{سأ} = \widehat{سأه} = \widehat{سأه} = \widehat{سأه}$  قياس  $\widehat{سأ}$

٣.  $\widehat{سأ} + \widehat{سأه} = \widehat{سأه} + \widehat{سأه} = \widehat{سأه} + \widehat{سأه}$  قياس  $\widehat{سأ}$

٤.  $\widehat{سأ} + \widehat{سأه} = \widehat{سأه} + \widehat{سأه} = \widehat{سأه} + \widehat{سأه}$  قياس  $\widehat{سأ}$

٥.  $\widehat{سأ} = \widehat{سأه} = \widehat{سأه} = \widehat{سأه}$  قياس  $\widehat{سأ}$

### نشاط (٣)

ادرس الشكل (٥-٤٧)، ثم أجب عن الأسئلة التالية :

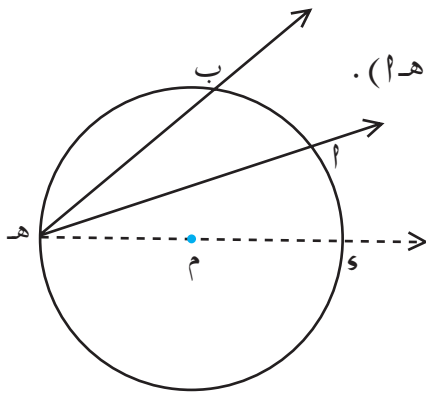
١- هل العبارات الآتية صحيحة ؟

١.  $\widehat{سأه} = \widehat{سأه} = \widehat{سأه} = \widehat{سأه}$  قياس  $\widehat{سأه}$

٢.  $\widehat{سأه} = \widehat{سأه} = \widehat{سأه} = \widehat{سأه}$  قياس  $\widehat{سأه}$

٣.  $\widehat{سأه} - \widehat{سأه} = \widehat{سأه} - \widehat{سأه} = \widehat{سأه} - \widehat{سأه}$  قياس  $\widehat{سأه}$

٤.  $\widehat{سأه} = \widehat{سأه} = \widehat{سأه} = \widehat{سأه}$  قياس  $\widehat{سأه}$



شكل (٥-٤٧)

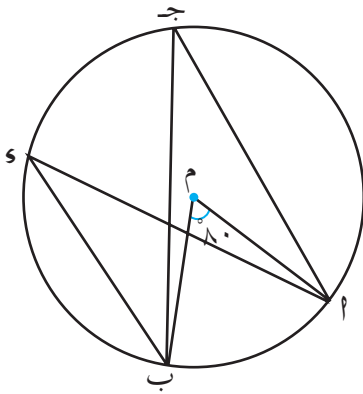
ب - من خلال إجاباتك على الأنشطة الثلاثة، هل أنت مقتنع أن قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها؟

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها .

وبصيغة أخرى :

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس .

مثال



شكل (٥ - ٤٨)

في الشكل (٥-٤٨) :  $\angle AOB = 80^\circ$  ،  $\angle ASB = 40^\circ$  ،

نقاط على الدائرة (م) . أوجد الآتي :

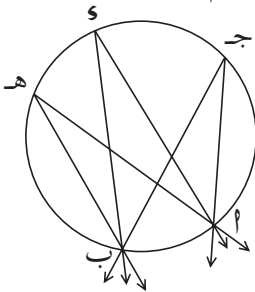
١-  $\angle ASB$  و  $\angle AOB$  .

ب-  $\angle ASB$  و  $\angle AOB$  .

الحل :

$$١- \angle ASB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$$

$$ب- \angle ASB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$$



شكل (٥ - ٤٩)

نشاط (٤)

في الشكل (٥-٤٩) قس الزوايا

$\angle ASB$  ،  $\angle AOB$  ،  $\angle ASB$  ،  $\angle AOB$

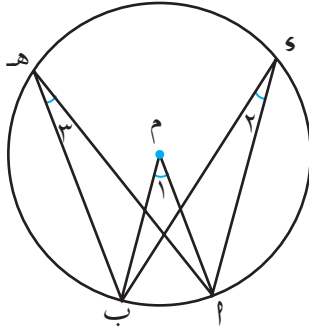
قارن القياسات، ماذا تلاحظ على الزوايا الثلاث؟

تلاحظ أن: الزوايا الثلاث  $\angle ج ب م$ ،  $\angle م و ب$ ،  $\angle م ه ب$  زوايا محيطية مشتركة في قوس واحد، كما تلاحظ أن قياسات الزوايا الثلاث متساوية.

### نشاط (٥)

ادرس الشكل (٥ - ٥٠) ثم أجب عن الأسئلة التالية:

١- هل العبارات الآتية صحيحة؟



شكل (٥ - ٥٠)

١.  $\angle م ه ب = \angle م و ب = \angle م ج ب$

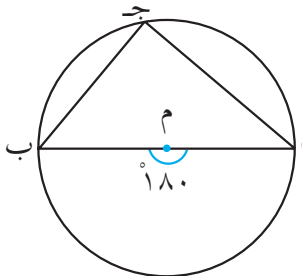
٢.  $\angle م ه ب = \angle م و ب = \angle م ج ب$

٣. هل الزاويتان ٢، ٣ في قطعة دائرية

واحدة؟ ماذا تلاحظ؟ ماذا تستنتج؟

مبرهنة (٥ - ٦):

الزوايا المحيطية المشتركة في قوس واحد من الدائرة الواحدة متطابقة.



شكل (٥ - ٥١)

### نشاط (٦)

في الشكل (٥ - ٥١)،  $\angle م ب ج$ ،  $\angle م ج ب$  تقع على الدائرة م،  $\angle م ب ج = \angle م ج ب = ١٨٠$

١- هل الزاوية  $\angle م ج ب$  قائمة؟

٢- الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تقابل قوساً قياسه ...

٣- هل الزاوية المحيطية القائمة تقابل زاوية مركزية قياسها  $١٨٠$ ؟

من ذلك نستنتج المبرهنة التالية :

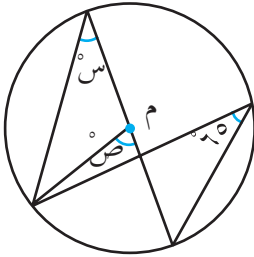
**مبرهنة (٥ - ٧) :**

إذا كانت الزاوية المحيطية مرسومة في نصف دائرة فإنها زاوية قائمة ،  
وعكس المبرهنة صحيح أي أنه :  
إذا كانت الزاوية المحيطية في الدائرة قائمة فإنها مرسومة في نصف دائرة .

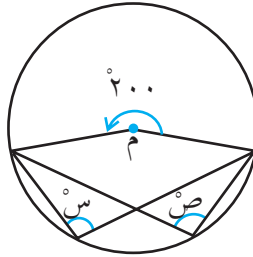
برهن المبرهنة (٥ - ٧) وعكسها .

### تمارين ومسائل

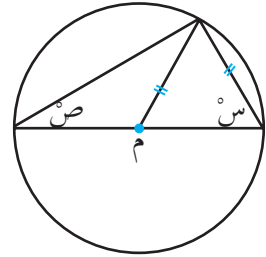
[١] في الأشكال (٥ - ١٥٢ ، ب ، ج ، د ، هـ) ، م مركز الدائرة، أوجد قيمتي  
س ، ص في كل شكل .



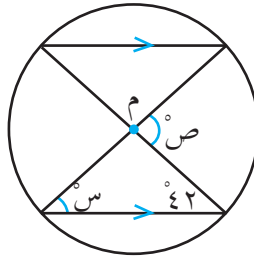
شكل (٥ - ١٥٢ ج)



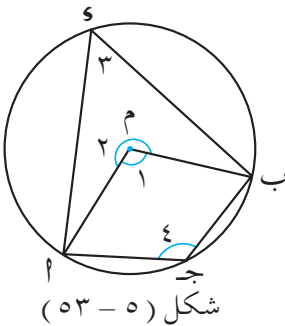
شكل (٥ - ١٥٢ ب)



شكل (٥ - ١٥٢)



شكل (٥ - ١٥٢ د)



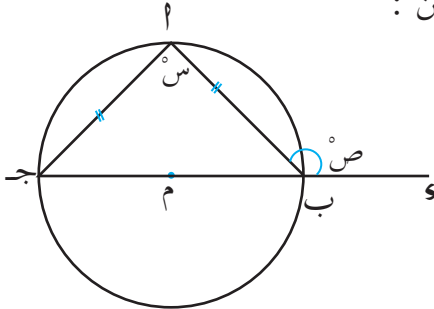
شكل (٥ - ١٥٣)

[٢] مستعيناً بالشكل (٥ - ١٥٣) ،

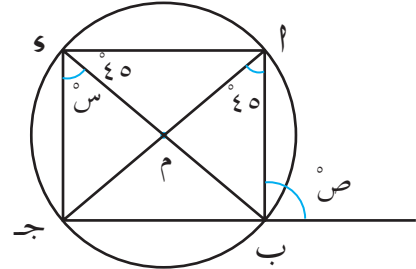
أثبت أن :

$$\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$$

[ ٣ ] في الشكلين (٥ - ١٥٤ ، ب) ، م مركز الدائرة ، أوجد قيمتي س ، ص في كل شكل من الشكلين التاليين :

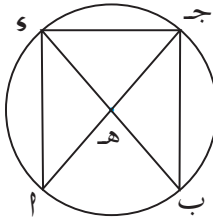


شكل (٥ - ١٥٤ ب)



شكل (٥ - ١٥٤ ب)

[ ٤ ]  $\overline{AB}$  قطر في الدائرة م ، ج نقطة على الدائرة نفسها ، احسب  $\widehat{A} \times \widehat{B}$  (ج ب) .



شكل (٥ - ٥٥)

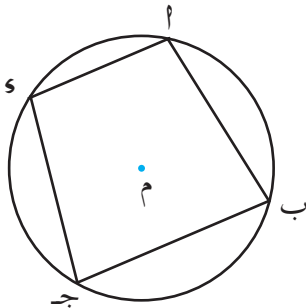
[ ٥ ] في الشكل (٥ - ٥٥) :

$\widehat{A} \approx \widehat{B}$  ج . أثبت أن :

$\Delta$  هـ جـ مثلثاً متساوي الساقين .

## ٥ : الشكل الرباعي الدائري

تعلم أن أي مضلع تنتمي رؤوسه لدائرة واحدة يسمى مضلعاً دائرياً ، وعلى ذلك فالرباعي الذي تنتمي رؤوسه لدائرة واحدة يسمى رباعياً دائرياً .



شكل (٥ - ٥٦)

تأمل الشكل (٥ - ٥٦) تلاحظ أن :

١ ب جـ و شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

، بحيث تقع رؤوسه الأربعة على الدائرة (م) ،

يسمى هذا الشكل رباعياً دائرياً .

تسمى  $\sphericalangle$  ب ا س ،  $\sphericalangle$  ب ج د ، زاويتان متقابلتان في الشكل الرباعي الدائري ، وكذلك  $\sphericalangle$  ا ب ج ،  $\sphericalangle$  ا ج د زاويتان متقابلتان .

مبرهنة ( ٥ - ٨ ) :

مجموع قياسي الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي  $180^\circ$  .

المعطيات : ا ب ج د شكل رباعي دائري، م مركز الدائرة .

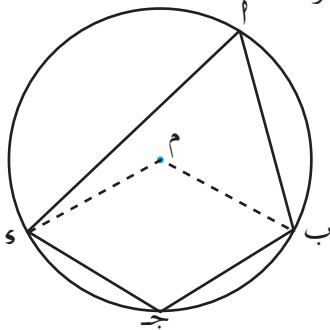
المطلوب : إثبات أن :

$$\text{أولاً : } \sphericalangle \text{ ا ب ج } + \sphericalangle \text{ ا ج د } = 180^\circ$$

$$\text{ثانياً : } \sphericalangle \text{ ا ب ج } + \sphericalangle \text{ ا ج د } = 180^\circ$$

العمل : نرسم  $\overline{م ب}$  ،  $\overline{م س}$  [ انظر شكل (٥٧-٥) ]

البرهان :



شكل (٥٧-٥)

$$\sphericalangle \text{ ا ب ج } = \frac{1}{2} \sphericalangle \text{ ا م ب } \quad \text{(مبرهنة) } \dots (١)$$

$$\sphericalangle \text{ ا ج د } = \frac{1}{2} \sphericalangle \text{ ا م س } \quad \text{(مبرهنة) } \dots (٢)$$

بجمع (١) ، (٢) ينتج :

$$\sphericalangle \text{ ا ب ج } + \sphericalangle \text{ ا ج د } = \frac{1}{2} [\sphericalangle \text{ ا م ب } + \sphericalangle \text{ ا م س }]$$

لكن  $\sphericalangle \text{ ا م ب } + \sphericalangle \text{ ا م س } = 360^\circ$  (مجموع الزوايا حول نقطة ) ،

$$\therefore \sphericalangle \text{ ا ب ج } + \sphericalangle \text{ ا ج د } = 360^\circ \times \frac{1}{2} = 180^\circ$$

وهو المطلوب أولاً

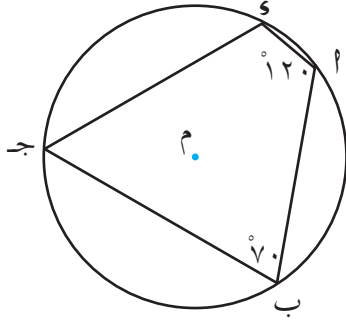


∴ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠

$$\therefore \overset{\circ}{180} = (\overset{\circ}{\alpha} + \overset{\circ}{\beta}) + (\overset{\circ}{\gamma} + \overset{\circ}{\delta})$$

وهو المطلوب ثانياً .

### مثال (١)



شكل (٥ - ٥٨)

في الشكل (٥ - ٥٨) إذا كانت :

$$\overset{\circ}{120} = \overset{\circ}{\alpha} , \text{ و } \overset{\circ}{70} = \overset{\circ}{\beta}$$

فأوجد قياس كل من  $\overset{\circ}{\gamma}$  ،  $\overset{\circ}{\delta}$  .

### الحل :

∴ رؤوس الشكل الرباعي A ب ج د تقع على الدائرة .

∴ A ب ج د شكل رباعي دائري .

$$\therefore \overset{\circ}{180} = (\overset{\circ}{\alpha} + \overset{\circ}{\beta}) + (\overset{\circ}{\gamma} + \overset{\circ}{\delta}) \text{ (مبرهنة) .}$$

$$\therefore \overset{\circ}{60} = \overset{\circ}{120} - \overset{\circ}{180} = (\overset{\circ}{\alpha} + \overset{\circ}{\beta}) - \overset{\circ}{180} = (\overset{\circ}{\gamma} + \overset{\circ}{\delta}) - \overset{\circ}{180}$$

$$\text{وبالمثل } \overset{\circ}{110} = \overset{\circ}{70} - \overset{\circ}{180} = (\overset{\circ}{\beta} + \overset{\circ}{\delta}) - \overset{\circ}{180} = (\overset{\circ}{\alpha} + \overset{\circ}{\gamma}) - \overset{\circ}{180}$$

### نشاط

ارسم مربعاً ، معيناً ، مستطيلاً ، ومتوازي أضلاع ، ثم ارسم دائرة

تمر برؤوس كل شكل من هذه الأشكال ... ماذا تلاحظ ؟ ماذا تستنتج ؟

متى يكون الشكل رباعياً دائرياً ؟

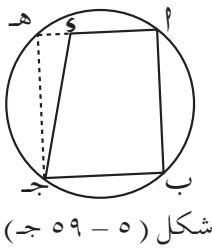
### عكس المبرهنة (٥ - ٨) :

يكون الشكل رباعياً دائرياً إذا كان مجموع قياسي زاويتين متقابلتين فيه  $\overset{\circ}{180}$  .

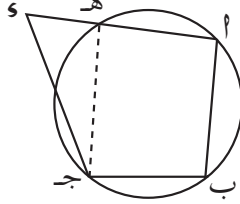
المعطيات : A ب ج د شكل رباعي فيه :  $\overset{\circ}{180} = (\overset{\circ}{\alpha} + \overset{\circ}{\beta}) + (\overset{\circ}{\gamma} + \overset{\circ}{\delta})$

المطلوب : إثبات أن الشكل  $أ ب ج د$  رباعي دائري .  
البرهان :

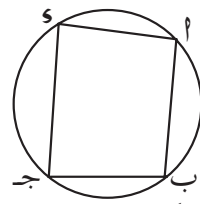
نرسم الدائرة التي تمر بالنقاط الثلاث  $أ ، ب ، ج$  ( أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة ) .



شكل ( ٥ - ٥٩ ج )



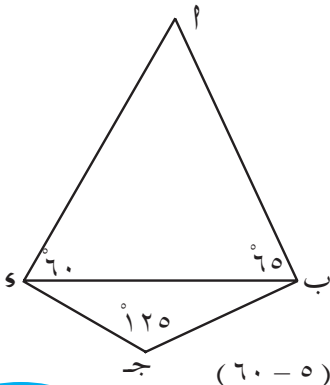
شكل ( ٥ - ٥٩ ب )



شكل ( ٥ - ٥٩ أ )

فإن مرت بالنقطة  $س$  [ شكل ( ٥ - ٥٩ ) ] تم المطلوب ، وإن لم تمر  
نفرض أن الدائرة تقطع  $أ س$  في النقطة  $هـ$  كما في الشكل  
( ٥ - ٥٩ ب ) أو امتداده كما في الشكل ( ٥ - ٥٩ ج ) ثم نصل  $ج هـ$  .  
∴ الشكل  $أ ب ج هـ$  رباعي دائري . ∴  $∠ هـ ب ج + ∠ هـ ج د = ١٨٠$  ،  
لكن  $∠ هـ ب ج + ∠ هـ ج د = ∠ هـ ب ج + ∠ هـ ج د = ١٨٠$  .

∴  $∠ هـ ب ج = ∠ هـ ج د$  وهذا غير ممكن إلا إذا انطبقت نقطة  $س$   
على نقطة  $هـ$  أي أن  $أ ب ج د$  شكل رباعي دائري وهو المطلوب .



شكل ( ٥ - ٦٠ )

مثال ( ٢ )

في الشكل ( ٥ - ٦٠ )  $أ ب ج د$  رباعي ،  
 $ب س$  قطر فيه .  $∠ هـ ب ج = ٦٥$  ،  
 $∠ هـ ج د = ٦٠$  ،  $∠ هـ ج د = ١٢٥$  ،  
أثبت أن  $أ ب ج د$  رباعي دائري .

المعطيات :  $\overline{ب س}$  قطر في الشكل الرباعي  $ا ب ج و$  ، حيث :

$$\overset{\circ}{و} = (\overset{\circ}{س ا ب}) = 65 ، \overset{\circ}{و} = (\overset{\circ}{ا س ب}) = 60 ، \overset{\circ}{و} = (\overset{\circ}{ب ج و}) = 125$$

المطلوب : إثبات أن :  $ا ب ج و$  رباعي دائري .

البرهان : في المثلث  $ا ب و$  .

$$\overset{\circ}{و} = (\overset{\circ}{س ا ب}) + (\overset{\circ}{ا س ب}) - 180$$

$$= 65 + 60 - 180 = 55$$

$$\therefore \overset{\circ}{و} = 125 + 55 = (\overset{\circ}{ب ج و}) + (\overset{\circ}{س ا ب})$$

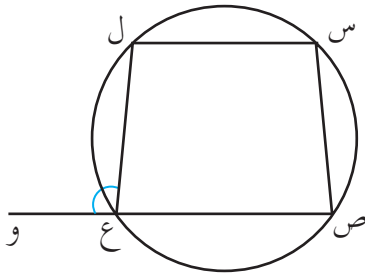
$\therefore$   $ا ب ج و$  شكل رباعي دائري ( لأن فيه  $\overset{\circ}{ا} + \overset{\circ}{ج} = 180$  )

متقابلتان متكاملتان ) .

### الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري :

إذا مُدَّ أحد أضلاع الشكل الرباعي الدائري على استقامته ، فإن الزاوية المحصورة بين امتداد هذا الضلع والضلع المجاور له تسمى زاوية خارجة عن الشكل

الرباعي الدائري انظر الشكل ( ٥ - ٦١ ) :



شكل ( ٥ - ٦١ )

س ص ع ل شكل رباعي دائري ، مدّ

$\overline{ص ع}$  على استقامته إلى و ،  $\overset{\circ}{و} = \overset{\circ}{ل ع و}$  وهي

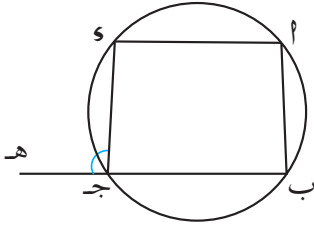
زاوية خارجة عن الشكل الرباعي الدائري

س ص ع ل .

مبرهنة ( ٥ - ٩ ) :

الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري تساوي الزاوية المقابلة

للزاوية المجاورة لها .



المعطيات :  $\angle$  ب ج و شكل رباعي دائري  
مدّ  $\overline{ب ج}$  إلى هـ [ انظر  
الشكل ( ٥-٦٢ ) ] .

المطلوب : إثبات أن  $\angle (س ج هـ) = \angle (ب س ا)$  . شكل ( ٥-٦٢ )

البرهان :  $\angle (س ج هـ) + \angle (ب ج س) = 180^\circ$  (١)  
( لأن  $\angle$  ب ج هـ مستقيمة )

$\angle (ب ج س) + \angle (ب س ا) = 180^\circ$  (مبرهنة) (٢)  
بمقارنة (١) ، (٢) ينتج أن :

$\angle (ب س ا) = \angle (س ج هـ)$  وهو المطلوب .

### مثال (٣)

في الشكل ( ٥-٦٣ ) :  $\angle$  ب ج و شكل رباعي دائري فيه  
 $\angle (ب س ا) = 60^\circ$  . مدّ  $\overline{ب ج}$  إلى هـ ، بحيث  $|ج هـ| = |ج و|$  ،  
أثبت أن المثلث ج و هـ متساوي أضلاع .

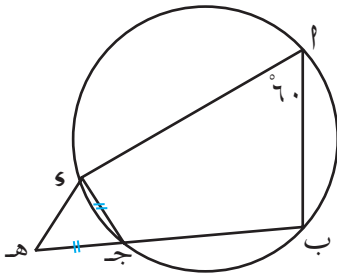
المعطيات :  $\angle$  ب ج و شكل رباعي دائري ،

$\angle (ب س ا) = 60^\circ$  ،

$|ج هـ| = |ج و|$

المطلوب : إثبات أن :

المثلث ج و هـ متساوي أضلاع .



شكل ( ٥-٦٣ )

البرهان :

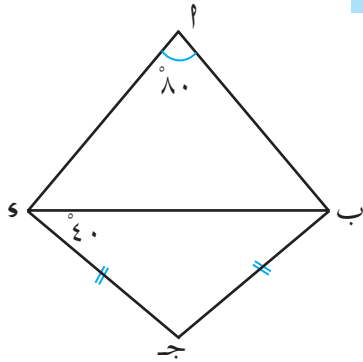
∴  $\angle$  س ج هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري  $\angle$  ب ج و .

$$\begin{aligned} \therefore \text{وه } (\angle \text{ج ه و}) &= \text{وه } (\angle \text{ب ا س}) = 60^\circ \text{ مبرهنة (1)} \\ \text{في } \Delta \text{ ج و ه: وه } (\angle \text{ج و ه}) &+ \text{وه } (\angle \text{س ه ج}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ. \\ \therefore |\text{ج ه}| &= |\text{ج و}| \text{ (معطى)} \\ \therefore \text{وه } (\angle \text{ج ه و}) &= \text{وه } (\angle \text{ج و ه}) = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \text{ (2)} \end{aligned}$$

من (1) ، (2) ينتج أن :

$$\begin{aligned} \text{وه } (\angle \text{س ج ه}) &= \text{وه } (\angle \text{ج ه و}) = \text{وه } (\angle \text{ج و ه}) = 60^\circ \\ \therefore \Delta \text{ ج و ه متساوي أضلاع.} \end{aligned}$$

### تمارين ومسائل



شكل (5-64)

[1] في الشكل (5 - 64) :

أ ب ج و رباعي ، ب و قطريه

$$|\text{ب ج}| = |\text{ج و}| \text{ ، وه } (\angle \text{ب ا س}) = 80^\circ ،$$

$$\text{وه } (\angle \text{ب و ج}) = 40^\circ .$$

أثبت أن : أ ب ج و رباعي دائري .

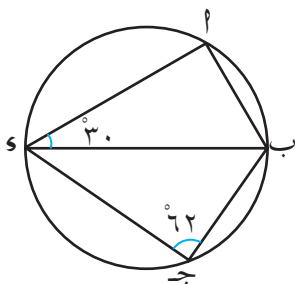
[2] في الشكل (5 - 65) :

أ ب ج و رباعي دائري .

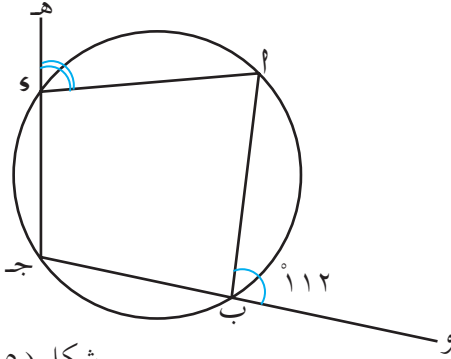
$$\text{إذا كان وه } (\angle \text{ب ج و}) = 62^\circ ،$$

$$\text{وه } (\angle \text{ب ا س}) = 30^\circ .$$

فاحسب قياس  $\angle \text{ا ب و}$  .



شكل (5-65)



شكل (٥-٦٦)

[٤] في الشكل (٥-٦٦) :

وه  $\angle \text{أ ب و} = 112^\circ$  ،

أوجد قياس  $\angle \text{س هـ}$  .

[٥] أ ب ج د مثلث متساوي الساقين، فيه  $|\text{أ ب}| = |\text{أ ج}|$  ، س نقطة على  $\overline{\text{أ ب}}$  ،

ص نقطة على  $\overline{\text{أ ج}}$  ، بحيث  $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب ج}}$  .

أثبت أن: ب ج ص س رباعي دائري .

[٦] دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، رسم المستقيم ج د و يقطع الأولى

في ج والثانية في و . ورسم المستقيم هـ ب و يقطع الأولى في هـ

والثانية في و . برهن على أن  $\overline{\text{ج هـ}}$  يوازي  $\overline{\text{و}}$  .

## ٥ : ٨ المماس

سبق أن تعرفت على الحالات الثلاث للأوضاع النسبية بين مستقيم ودائرة وهي :

(١) أن يقطع المستقيم الدائرة في نقطتين .

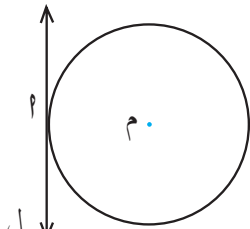
(٢) لا توجد أية نقطة مشتركة بين المستقيم والدائرة .

(٣) توجد فقط نقطة واحدة مشتركة بين المستقيم والدائرة

وفي الحالة الثالثة يسمى المستقيم مماساً للدائرة وتسمى

النقطة المشتركة نقطة التماس .

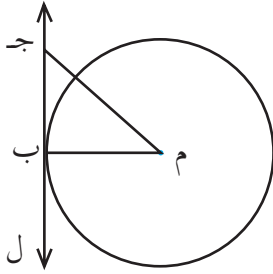
انظر الشكل (٥-٦٧) :



شكل (٥-٦٧)

المستقيم ل مماس للدائرة (م) ، أ هي نقطة التماس .

## نشاط



شكل (٥ - ٦٨)

(١) ارسم دائرة مركزها (م) .

(٢) حدد نقطة مثل (ب) على محيط الدائرة

فيكون  $\overline{MB}$  نصف قطر في الدائرة .

(٣) ارسم المستقيم ل عمودياً على  $\overline{MB}$

عند النقطة ب .

هل  $\overleftrightarrow{L}$  مماس للدائرة في نقطة (ب) ؟

للإجابة عن ذلك خذ نقطة أخرى مثل جـ  $\overleftrightarrow{L}$  ثم صل النقطة جـ بمركز

الدائرة (م) . ماذا تلاحظ ؟

ستلاحظ أن :  $|م جـ| < |م ب|$  .

لكن  $|م ب| = \text{نق}$  .

$\therefore |م جـ| < \text{نق}$  .

إذن نقطة جـ لا تنتمي للدائرة (م) ، وهكذا كل نقطة تنتمي للمستقيم

ل غير النقطة ب يكون البعد بينها وبين مركز الدائرة دائماً أكبر من نصف قطر

الدائرة أي أن : ب هي النقطة الوحيدة التي تنتمي إلى كل من المستقيم ل

والدائرة . مما سبق يمكن القول أن :

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة من نقطة نهايته على

الدائرة يكون مماساً للدائرة عند هذه النقطة .

### مماس الدائرة يكون عمودي على نصف القطر المار بنقطة التماس

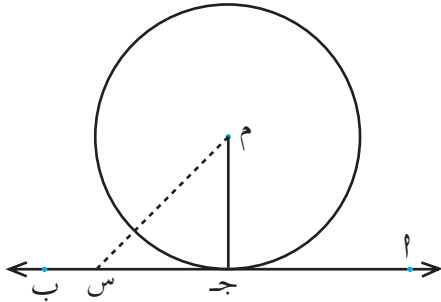
المعطيات:  $\overleftrightarrow{AB}$  يمس الدائرة (م) في نقطة ج،  $\overline{MJ}$  نصف قطر .

[ انظر الشكل (٥ - ٦٩) ] .

المطلوب: إثبات أن:  $\overline{MJ} \perp \overleftrightarrow{AB}$

العمل: نأخذ نقطة مثل س على

$\overleftrightarrow{AB}$  ونصل  $\overline{MS}$  .



شكل (٥ - ٦٩)

البرهان:

$\therefore \overleftrightarrow{AB}$  يمس الدائرة في ج .

$\therefore$  كل نقطة على المماس غير نقطة ج تقع خارج الدائرة ، لذلك

نقطة س تقع خارج الدائرة .

$\therefore |MS| < |MJ|$  .

لكن  $\overline{MJ}$  نصف قطر في الدائرة .

وبالمثل يمكن إثبات أن  $\overline{MJ}$  أصغر من أي مستقيم واصل من

المركز (م) إلى أي نقطة على  $\overleftrightarrow{AB}$  غير ج .

$\therefore \overline{MJ}$  أقصر القطع المستقيمة الواصلة من م إلى  $\overleftrightarrow{AB}$  .

$\therefore \overline{MJ} \perp \overleftrightarrow{AB}$  وهو المطلوب .

نتيجة (١)

لا يمكن رسم أكثر من مماس واحد لدائرة من نقطة عليها .

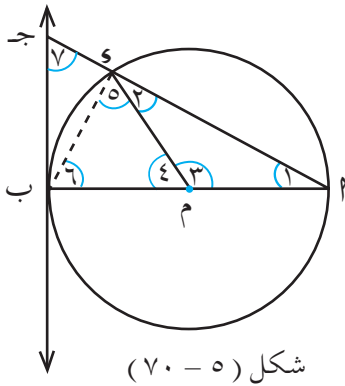


## نتيجة (٢)

العمود المقام على مماس دائرة من نقطة التماس يمر بمركزها .

## مثال

$\overline{AB}$  قطر في الدائرة (م) ،  $\overleftrightarrow{BC}$  مماس للدائرة م ، رسم  $\overline{CA}$  فقطع المحيط في (س) ، أثبت أن :  $\sphericalangle(1) = \sphericalangle(2)$  و  $\sphericalangle(3) = \sphericalangle(4)$  .



شكل (٥٠ - ٧٠)

المعطيات :  $\overline{AB}$  قطر في الدائرة (م) ،  
 $\overleftrightarrow{BC}$  مماس لها ،  $\overline{CA}$  يقطع  
 الدائرة في (س)

المطلوب : إثبات أن :

$$\sphericalangle(1) = \sphericalangle(2) \text{ و } \sphericalangle(3) = \sphericalangle(4)$$

العمل : نرسم  $\overline{BS}$  .

البرهان :

انظر الشكل (٥٠ - ٧٠)

في  $\Delta MAS$  :  $\sphericalangle(1) = \sphericalangle(2)$  لأن  $|AM| = |AS|$  — (١)

في  $\Delta MBS$  :  $\sphericalangle(3) = \sphericalangle(4)$  لأن  $|MB| = |MS|$  — (٢)

في  $\Delta ABC$  القائمة في ب :  $\sphericalangle(7) + \sphericalangle(1) = 90^\circ$  — (٣)

بالمثل  $\sphericalangle(6) + \sphericalangle(2) = 90^\circ$  — (٤)

من (٣) ، (٤) ينتج أن :

$$\sphericalangle(6) + \sphericalangle(2) = \sphericalangle(7) + \sphericalangle(1)$$

$$\therefore \sphericalangle(6) = \sphericalangle(7)$$

ولكن  $\angle 4$  تكمل  $\angle 3$

$$\therefore \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ \quad (1)$$

$\therefore \angle 4$  تكمل  $\angle 2$  ،  $\angle 6$  ،

$$\therefore \angle 6 = \angle 2$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3 \quad (2)$$

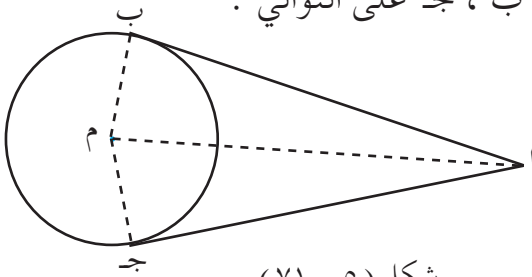
$\therefore \angle 2 = \angle 3$  (مجازا) وهو المطلوب .

### مبرهنة (٥ - ١١)

المماسان المرسومان لدائرة من نقطة خارجها متطابقان .

المعطيات: في الشكل (٥-٧١):  $P$  نقطة خارج الدائرة (م) .  $PA$  ،  $PB$  ،  $PC$

مماسان لها عند النقطتين  $B$  ،  $C$  على التوالي .



المطلوب: إثبات أن :

$$|PA| = |PB|$$

العمل :

نرسم  $MA$  ،  $MB$  ،  $MC$  . شكل (٥ - ٧١)

البرهان :

في  $\triangle PAB$  ،  $\triangle PBC$  ،  $\angle 1 = \angle 2$  ،  $MB = MC$  ،  $MB \perp PB$  ،  $MC \perp PC$  (مبرهنة)

$$\left. \begin{aligned} & |PA| = |PB| \\ & |PB| = |PC| \\ & \text{ضلع مشترك } MB \end{aligned} \right\}$$

البرهان :  $\triangle PAB \cong \triangle PBC$  .

$$\therefore \triangle PAB \cong \triangle PBC$$

ومن ذلك ينتج أن  $|PA| = |PB|$  وهو المطلوب .

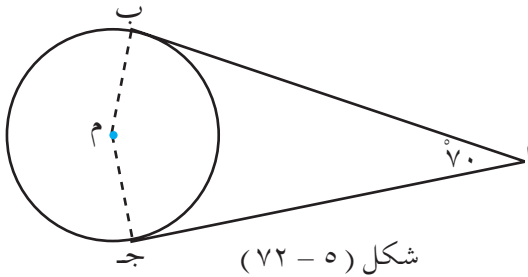
### نتيجة (١)

المماسان المرسومان من نقطة خارج دائرة يقابلان زاويتين مركزيتين متطابقتين.

### نتيجة (٢)

القطعة المستقيمة الواصلة بين مركز دائرة ونقطة خارجها تنصف الزاوية التي ضلعاها مماسا الدائرة من تلك النقطة.

### مثال (٢)



شكل (٥ - ٧٢)

النقطة  $P$  خارج الدائرة  $M$  ،  
رسم المماسان  $PA$  ،  $PB$  ،  $\angle APB = 70^\circ$  ،  
الدائرة في  $B$  ،  $C$  .

فإذا كان  $\angle CPM = x$  ، فأوجد  $\angle CPM$  و  $\angle CPM$  انظر الشكل (٥ - ٧٢) .

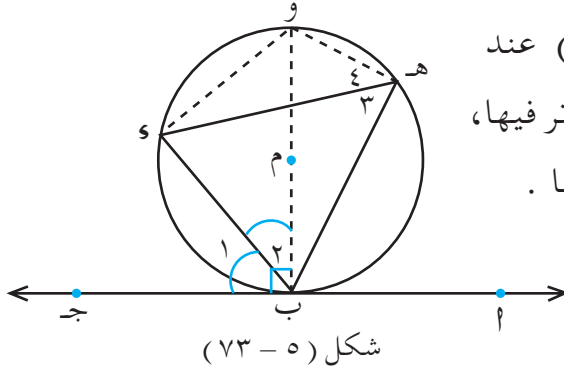
### الحل:

المعطيات :  $P$  نقطة خارج الدائرة  $M$  ،  $PA$  ،  $PB$  ، مماسان لدائرة ،  
 $\angle APB = 70^\circ$  ،  
المطلوب : إيجاد  $\angle CPM$  و  $\angle CPM$  .  
 $\angle CPM$  شكل رباعي .

$$\begin{aligned} \therefore \angle CPM + \angle CPM + \angle CPM + \angle CPM &= 360^\circ \\ \therefore \angle CPM + \angle CPM + \angle CPM + \angle CPM &= 360^\circ \\ \therefore \angle CPM + \angle CPM + \angle CPM + \angle CPM &= 360^\circ \\ \therefore \angle CPM + \angle CPM + \angle CPM + \angle CPM &= 360^\circ \end{aligned}$$

## مبرهنة (٥ - ١٢)

« قياس الزاوية المحصورة بين المماس والوتر المار بنقطة التماس يساوي  
قياس الزاوية المحيطية المقابلة لوتر التماس من الجهة الأخرى » .



شكل (٥ - ٧٣)

المعطيات:  $\vec{AJ}$  مماس للدائرة (م) عند  
النقطة (ب)،  $\overline{BS}$  وتر فيها،  
 $\angle BHS$  محيطية فيها .

المطلوب: إثبات أن :

$$\widehat{(SBS)} = \widehat{(SAB)} \text{ و } \widehat{(BHS)} = \widehat{(SAB)}$$

العمل: نرسم القطر  $\overline{BS}$ ، ثم نرسم  $\overline{SH}$ ، و  $\overline{AS}$  [ انظر الشكل (٥ - ٧٣) ].  
البرهان:

$$\therefore \vec{BJ} \perp \overline{BS} \text{ (مبرهنة)}$$

$$\therefore 90^\circ = \widehat{(2)} + \widehat{(1)}$$

$$\widehat{(3)} + \widehat{(4)} = 90^\circ \text{ (مبرهنة)}$$

$$\therefore \widehat{(1)} + \widehat{(2)} = \widehat{(3)} + \widehat{(4)} \text{ (١) } \dots \dots \dots$$

ولكن  $\widehat{(2)} = \widehat{(4)}$  (محيطيتان تقابلان نفس القوس) . . . . . (٢)

بمقارنة (١)، (٢) ينتج أن :

$$\widehat{(1)} = \widehat{(3)}$$

أي أن :  $\widehat{(SBS)} = \widehat{(SAB)}$  وهو المطلوب .

## نتيجة (٣) :

« إذا رسم مستقيم من إحدى نهايتي وتر في دائرة يصنع معه زاوية تساوي بالقياس الزاوية المحيطية المقابلة للوتر من الجهة الأخرى كان ذلك المستقيم مماساً للدائرة » .

## مثال (٣)

$\overline{AB}$  وتر في الدائرة (م) ،  $\overline{AP}$  مماس لها في  $P$  ، رسم  $\overline{BS}$  فقطع محيط الدائرة في ج . أثبت أن :  $\angle (SAB) = \angle (SAC)$  .

المعطيات :  $\overline{AB}$  وتر في الدائرة م ،  $\overline{AP}$  مماس لها

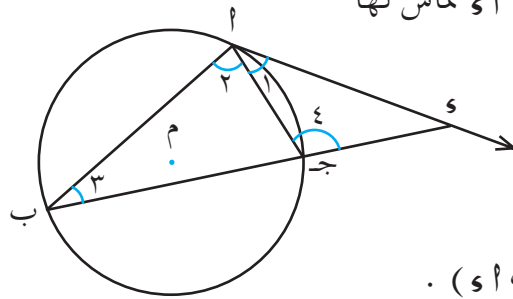
$\overline{BS}$  يقطع الدائرة في ج

[ انظر الشكل (٧٤-٥) ]

المطلوب : إثبات أن :

$$\angle (SAB) = \angle (SAC)$$

البرهان :



شكل (٥ - ٧٤)

(معطى)

$\overline{AP}$  مماساً ،  $\overline{AC}$  وتر التماس

$$\therefore \angle (1) = \angle (3) \text{ — (١) (مبرهنة ٥ - ١٢)}$$

$\angle 4$  خارجه عن المثلث  $ABC$

$$\therefore \angle (4) = \angle (2) + \angle (3) \text{ — (٢) (مبرهنة)}$$

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$$\angle (1) + \angle (2) = \angle (4)$$

أي أن :  $\angle (SAB) = \angle (SAC)$  وهو المطلوب .

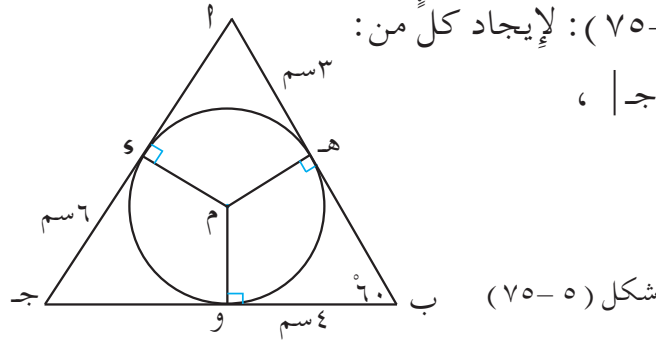
## تمارين ومسائل

[ ١ ] م دائرة،  $\overline{AB}$  قطريها ، ج نقطة على محيطها ، مد  $\overline{BA}$  إلى النقطة « و » ، ثم وصل  $\overline{AJ}$  . فإذا كان  $\angle AJM = 60^\circ$  وكان  $\overline{AJ}$  مماساً للدائرة . فأثبت أن المثلث  $\triangle AJM$  متساوي الساقين .

[ ٢ ] م دائرة قطرها  $\overline{AB}$  فرضت نقطة ج على محيطها بحيث كان  $\angle AJM = \angle BJM$  ، ثم رسم لها مماساً من النقطة (أ) لاقى امتداد  $\overline{BA}$  في النقطة « هـ » ، أثبت أن :  $\angle AJM = \angle BJM$  .

[ ٣ ]  $\overline{AB}$  قطر في دائرة  $\overline{AJ}$  ،  $\overline{AJ}$  وتران في جهة واحدة من  $\overline{AB}$  ، مدّا كل من  $\overline{AJ}$  ،  $\overline{AJ}$  حتى لاقيا المماس المرسوم من النقطة ب في النقطتين س ، ص على الترتيب ، أثبت أن الشكل س ج و ص رباعي دائري .

[ ٤ ] استعن بالشكل (٧٥-٥) : لإيجاد كلٍّ من :  
 $\angle AJM$  ،  $\angle BJM$  ،  $\angle AJM$  ،  
 و  $\angle HJM$  .



[ ٥ ] رسم القطر  $\overline{AB}$  في الدائرة (م) وفرضت النقطة ج على الدائرة ، ثم رسم منها مماساً للدائرة ، فإذا رسمت  $\overline{AJ}$  عمودية على المماس ، برهن أن :  $\overline{AJ}$  ينصف  $\angle BAJ$  .

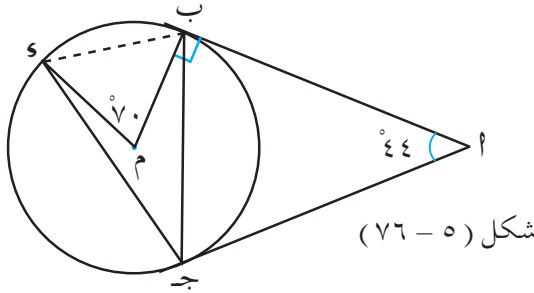
[ ٦ ]  $\overline{AB}$  وتر في دائرة مركزها (م) ،  $\overline{BS}$  مماساً لها ، ج نقطة على  $\overline{BS}$  بحيث  $\angle AJM = \angle BJM$  ، رُسم  $\overline{AJ}$  فقطع محيط الدائرة في و ، أثبت أن  $\triangle BAJ$  متساوي الساقين .

[٧]  $\overline{أب}$  قطر في الدائرة (م)،  $\overline{بج}$  وتر فيها، رسم من النقطة ج مماس للدائرة، ثم رسم  $\overline{م س}$  ينصف  $\overline{بج}$ ، ويلاقى المماس في النقطة (س). فإذا كان  $\angle م ج ب = 30^\circ$ ، فأثبت أن:

$$\text{أولاً: } \angle م ج س = \angle م ج ب = 60^\circ.$$

ثانياً: الشكل  $\angle م ج س$  رباعي دائري. ثالثاً:  $\overline{س ب}$  مماس للدائرة في ب.

[٨]  $\overline{أب}$ ،  $\overline{أج}$  وتران متطابقان في دائرة،  $\overline{أه}$  مماس لها. برهن أن:  $\overline{أه} \parallel \overline{بج}$ .



[٩] في الشكل (٥ - ٧٦)

أوجد مع البرهان:

$$\angle م ج س = \angle م ج ب.$$

شكل (٥ - ٧٦)

[١٠]  $\overline{أب ج د}$  رباعي دائري، رسم من النقطتين  $\angle$ ، ب المماسان  $\overline{أه}$ ،  $\overline{ب ه}$

فتقاطعا في النقطة (ه)، فإذا كان:  $\angle م ج ب = 70^\circ$ ،  $\angle م ج د = 40^\circ$ ،

$$\angle م أ ب س = 39^\circ$$
، فأوجد قياس زوايا المثلث  $\angle$  ب ج د

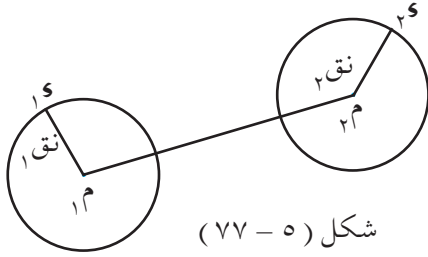
## ٥ : ٩ الأوضاع المختلفة لعلاقة دائرتين

هناك ثلاث حالات للأوضاع النسبية لدائرتين وهي:

أولاً: دائرتان منفصلتان:

في هذه الحالة لا توجد أي نقطة مشتركة بين الدائرتين أي أن:

$$\Phi = 2 \quad \text{و يقال عنهما دائرتان منفصلتان وفيهما حالتان هما:}$$



شكل (٥ - ٧٧)

الحالة الأولى : الدائرتان متباعدتان

وأن خط المركزين ( البعد

بين المركزين)  $M_1M_2$  يكون :

أكبر من مجموع طولي نصفي

القطرين للدائرتين. أي أن  $|M_1M_2| > r_1 + r_2$

[ انظر الشكل ( ٥ - ٧٧ ) .

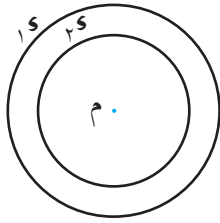
الحالة الثانية : إحداهما تحوى الأخرى وبالتالي .

إما أن تشتركا في المركز،

وفي هذه الحالة نجد أن خط

المركزين يكون  $|M_1M_2| = 0$  صفراً

[ انظر الشكل (٥ - ٧٨) ] .



شكل (٥ - ٧٨)

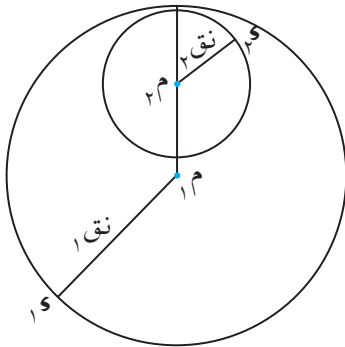
وإما أنهما مختلفتا المركزين، وفي

هذه الحالة خط المركزين يكون أصغر من

مجموع نصفي قطريهما أي أن :

$$|M_1M_2| < r_1 + r_2$$

[ انظر الشكل ( ٥ - ٧٩ ) ] .



شكل (٥ - ٧٩)

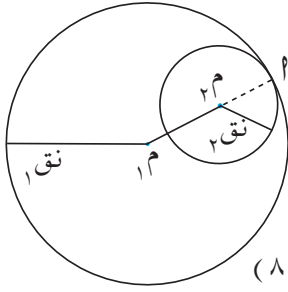
ثانياً : دائرتان متماستان :

في هذه الحالة توجد نقطة واحدة مشتركة (نقطة تماس) بين الدائرتين

$M_1, M_2$  أي أن  $\{P\} = M_1 \cap M_2$  حيث  $P$  نقطة التماس ، وفي هذه الحالة

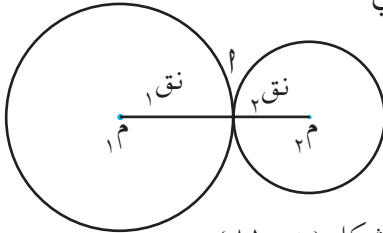
يقال أن الدائرتين متماستان وهناك حالتان هما :





شكل (٥-٨٠)

الحالة الأولى : الدائرتان متماستان من الداخل  
 في نقطة  $P$  [ انظر الشكل (٥-٨٠) ]  
 فيكون  $|M_1, M_2| = \text{نق}_1 - \text{نق}_2$



شكل (٥-٨١)

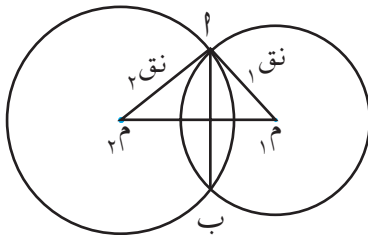
الحالة الثانية : الدائرتان متماستان من الخارج في  
 نقطة  $P$  [ انظر الشكل (٥-٨١) ]  
 فيكون  $|M_1, M_2| = \text{نق}_1 + \text{نق}_2$

### ثالثاً : دائرتان متقاطعتان :

في هذه الحالة توجد نقطتان مشتركتان أو أكثر بين الدائرتين ، وفيها

حالتان :

الحالة الأولى : الدائرتان المتقاطعتان بنقطتين فقط هما  $A$  ،  $B$



شكل (٥-٨٢)

[ انظر الشكل (٥-٨٢) ] ،

حيث  $\{A, B\} = M_1 \cap M_2$   
 $A$  ،  $B$  نقطتا التقاطع ويكون :

$$|M_1, M_2| > \text{نق}_1 + \text{نق}_2$$

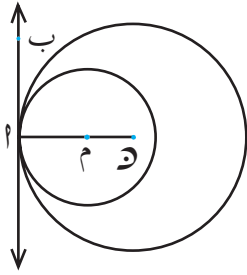
ويسمى  $\overline{AB}$  وتر مشترك للدائرتين .

الحالة الثانية : الدائرتان متقاطعتان بأكثر من نقطتين ، فهما متطابقتان ، أي أن :

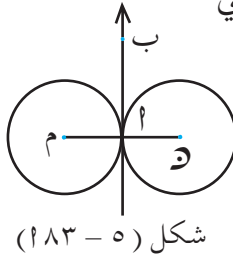
$$M_1 \cup M_2 = M_1 \cap M_2 = \text{صفرًا}$$

## مبرهنة (٥ - ١٣) :

نقطة التماس لدائرتين تقع على خط المركزين .



شكل (٥ - ٨٣ ب)



شكل (٥ - ٨٣ أ)

المعطيات : م ، د دائرتان متماستان في

النقطة P [ انظر الشكلين

. [ (٥ - ٨٣ ب ) ] .

المطلوب : إثبات أن :

م ، P ، د على استقامة واحدة

البرهان :

∴ ∠BPA مماس مشترك للدائرتين عند P

∴ ∠BPA = 90°

∴ ∠BPA = 90°

∴ ∠BPA = 90° + ∠BPA = 180° [ انظر الشكل (٥ - ٨٣ أ) ]

∴ ∠BPA منطبق على ∠BPA [ انظر الشكل (٥ - ٨٣ ب) ]

∴ م ، P ، د على استقامة واحدة ،

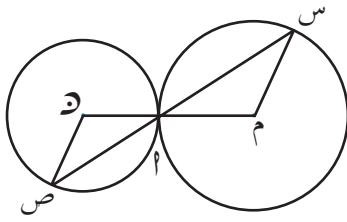
وحيث أن  $\overline{MD}$  هو خط المركزين ،

∴ النقطة P ( نقطة التماس ) تقع على خط المركزين . وهو المطلوب .

مثال (١)

م ، د دائرتان متماستان من الخارج في نقطة P . رسم  $\overline{S}$  يمر بالنقطة

P بحيث يقطع الدائرة م في س ، الدائرة د في ص ، أثبت أن :  $\overline{SM} \parallel \overline{SD}$  .



شكل (٥ - ٨٤)

المعطيات : م ، د دائرتان متماستان من الخارج في نقطة  $أ$  ،  $س$  ص يمر بالنقطة  $أ$  ، يقطع م في  $س$  ، د في  $ص$  .

المطلوب : إثبات أن :  $س م \parallel ص د$  .

العمل : نرسم خط المراكزين م د [ انظر الشكل (٥ - ٨٤) ] .

البرهان :  $|م أ| = |م س| = |نق$

$\therefore \angle م س أ = \angle م أ س = \angle م أ ص = \angle م أ د$  (١) ... (٢)  $\Delta م س أ$  متساوي الساقين

بالمثل  $\angle م د س = \angle م د ص = \angle م د أ = \angle م د م$  (٣) ... (٤)  $\Delta م د س$  متساوي الساقين

ولكن  $\angle م أ س = \angle م أ د = \angle م د س = \angle م د ص$  (٥) ... (٦) (بالتقابل بالرأس)

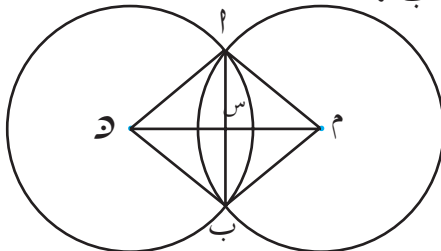
بمقارنة (١) ، (٢) ، (٣) نحصل على أن :

$\angle م س أ = \angle م د س$  وهما متبادلتان .

$\therefore س م \parallel ص د$  وهو المطلوب .

### مبرهنة (٥ - ١٤) :

خط المراكزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه .



شكل (٥ - ٨٥)

المعطيات : م ، د دائرتان متقاطعتان في  $أ$  ، ب ،

م د يقطع الوتر المشترك  $أ ب$  في  $س$  .

المطلوب : إثبات أن :

$م د \perp أ ب$  وينصفه .

العمل: نرسم  $\overline{AM}$ ،  $\overline{BM}$ ،  $\overline{AD}$ ،  $\overline{BD}$  [انظر الشكل (٥-٨٥)].

البرهان:  $\Delta \overline{AMD}$ ،  $\Delta \overline{BMD}$  فيهما  $\left. \begin{array}{l} |AM| = |BM| \\ |AD| = |BD| \\ \overline{MD} \text{ ضلع مشترك} \end{array} \right\}$

$\therefore \Delta \overline{AMD} \cong \Delta \overline{BMD}$ .

$\therefore \angle (\overline{AM}, \overline{MD}) = \angle (\overline{BM}, \overline{MD})$ .

$\therefore \Delta \overline{AMB}$  متساوي الساقين فيه  $(|AM| = |BM|)$ ،  $\overline{MS}$  منصف زاوية الرأس  $M$ .

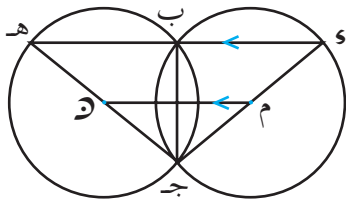
$\therefore \overline{MS} \perp \overline{AB}$  وينصفه (مبرهنة)

$\therefore \overline{MS} \perp \overline{AB}$  وينصفه وهو المطلوب.

### مثال (٢)

الدائرتان  $M$ ،  $D$  متقاطعتان في  $B$ ،  $C$ ، رسم  $\overline{EH}$  يمر بالنقطة  $B$ ، ويوازي  $\overline{MD}$  فقطع الدائرتين  $M$ ،  $D$  في  $E$ ،  $H$  على التوالي.

أثبت أن: (١)  $\overline{BC} \perp \overline{EH}$  (٢)  $|EH| = 2|MD|$ .



شكل (٥-٨٦)

المعطيات:  $M$ ،  $D$  دائرتان متقاطعتان في  $B$ ،  $C$ ،

$\overline{EH}$  يمر بالنقطة  $B$  ويقطع  $M$  في

$E$ ،  $D$  في  $H$ ،

$\overline{EH} \parallel \overline{MD}$

[انظر الشكل (٥-٨٦)].

المطلوب: إثبات أن: أولاً:  $\overline{BC} \perp \overline{EH}$  ثانياً:  $|EH| = 2|MD|$ .

البرهان :  $\therefore \overline{ب ج} \perp \overline{م د}$  وتر مشترك ( معطى )

$\therefore \overline{م د} \perp \overline{ب ج}$  وينصفه ( مبرهنة )

$\therefore \overline{م د} \parallel \overline{و ه}$  ( معطى )

$\therefore \overline{ب ج} \perp \overline{و ه}$  ( وهو المطلوب أولاً ) .

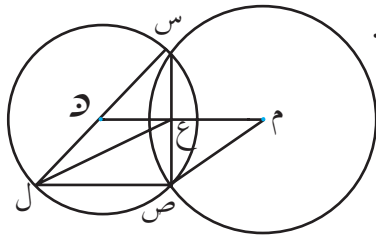
في  $\Delta ج و ه$  :  $\overline{م د} \parallel \overline{و ه}$  ،  $\overline{م د}$  ينصف  $\overline{ج و}$  ،  $\overline{ج ه}$

$$\therefore |م د| = \frac{1}{2} |و ه| .$$

$$\therefore |و ه| = 2 |م د| \text{ وهو المطلوب ثانياً .}$$

### مثال ( ٣ )

م ، د دائرتان متقاطعتان في س ، ص ، رسم  $\overline{م د}$  فقطع س ص في ع بحيث كان  $|ع م| = 2 |ع د|$  ، ثم رسم  $\overline{س د}$  ومد حتى لاقى محيط الدائرة د في ل .



شكل ( ٥ - ٨٧ )

أثبت أن : الشكل م ص ل ع متوازي أضلاع .

المعطيات : م ، د دائرتان متقاطعتان في س ، ص ،

$\overline{م د}$  ، س ص يتقاطعان في ع

$$|ع م| = 2 |ع د|$$

رسم  $\overline{س د}$  ومد حتى لاقى محيط الدائرة د في ل [ انظر الشكل ( ٥ - ٨٧ ) ] .

المطلوب : إثبات أن : الشكل م ص ل ع متوازي أضلاع .

البرهان :

$\overline{م د} \perp \overline{س ص}$  وينصفه ( مبرهنة )

$$|س ع| = |ع ص|$$

في  $\Delta$  س ص ل :  $\overline{ع د}$  ينصف  $\overline{س ص}$  ،  $\overline{س ل}$

$$\therefore \overline{ع د} \parallel \overline{س ل} ، |ع د| = \frac{1}{2} |س ل|$$

$$\therefore \overline{م د} \parallel \overline{س ل} \dots (١)$$

$$، \therefore |ع م| = 2 |ع د| \text{ (معطى)}$$

$$\therefore |ع م| = |س ل| \dots (٢)$$

في الشكل م ص ل ع :

$$\text{من (١) : } \overline{م ع} \parallel \overline{س ل}$$

$$\text{ومن (٢) } |ع م| = |س ل| .$$

$\therefore$  الشكل م ص ل ع متوازي أضلاع وهو المطلوب .

### تمارين ومسائل

[ ١ ] دائرتان متماستان ، نصف قطريهما  $٣$  سم ،  $٢$  سم ، ما المسافة بين مركزيهما

(١) إذا كانتا متماستين من الداخل . ب) إذا كانتا متماستين من الخارج .

[ ٢ ] م ، د دائرتان متماستان من الخارج في ب ، س نقطة خارجهما رسم

منها المماس المشترك  $\overline{س ب}$  والمماس  $\overline{س أ}$  للدائرة م ، والمماس  $\overline{س ج}$

للدائرة د . أثبت أن :  $|س أ| = |س ب| = |س ج|$  .

[ ٣ ] م ، د دائرتان متماستان من الخارج في أ ، رسم  $\overline{ب ج}$  المماس المشترك

لهما مس د في ب ، ومس م في ج . أثبت أن :

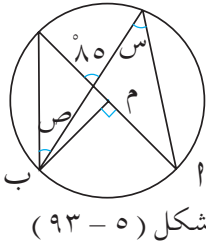
(١) المماس المشترك للدائرتين عند أ ينصف  $\overline{ب ج}$  .

ب) وه  $(\sphericalangle ب أ ج) = ٩٠^\circ$







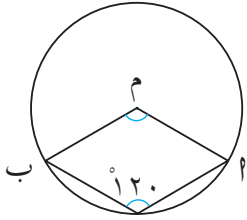


[٦] في الشكل (٥-٩٣): م مركز الدائرة،

وه  $(\angle م ب) = 90^\circ$ . أوجد قيم

س، ص بالدرجات .

[٧] اثبت أن الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري متكاملتان .



[٨] في الشكل (٥-٩٤): م مركز

الدائرة، أوجد وه  $(\angle م ب)$  .

شكل (٥-٩٤)

[٩] في الشكل (٥-٩٥): م، د دائرتان

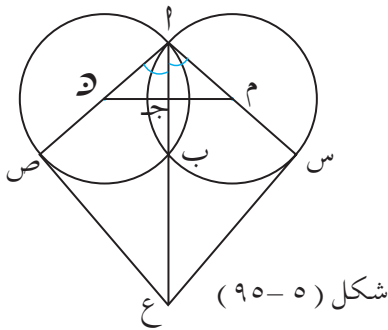
متقاطعتان في م، ب.  $\overline{أ س}$  قطر في

الدائرة م،  $\overline{أ ص}$  قطر في الدائرة د،

مد  $\overline{أ ب}$  على استقامته إلى النقطة ع .

فإذا كان: ع مماساً للدائرة م، ع ص

مماساً للدائرة د. وإذا كان  $\overline{د م}$  يقطع



$\overline{أ ب}$  في ج، وه  $(\angle س أ ب) = (\angle ص أ ب)$ ، أثبت أن:

(أ) الشكل ع س أ ص رباعي دائري. (ب) النقاط س، ب، ص على استقامة واحدة.

[١٠] أ ب ج د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة، فإذا كان  $\overline{أ ج}$  ينصف كلاً

من الزاويتين م، ج، فأثبت أن  $\overline{أ ج}$  قطر في الدائرة .

[١١] أ ب ج د مثلث مرسوم في دائرة فيه: وه  $(\angle م) = 40^\circ$  وه  $(\angle ج) = 80^\circ$ ،

رسم  $\overrightarrow{س م}$  مماساً للدائرة وماراً بالنقطة م بحيث  $\overline{أ س}$ ،  $\overline{أ و}$  في جهتين

مختلفتين من  $\overline{أ ج}$ ، عينت النقطة د على  $\overline{أ س}$  بحيث  $|\overline{أ د}| = |\overline{أ ج}|$

المطلوب : ١) أوجد  $\widehat{و}$  ( $\sphericalangle ج ا د$ ) . ب) برهن أن  $\overline{ج د}$  مماساً للدائرة .  
 [١٢] م ،  $\sphericalangle د$  دائرتان متماستان من الداخل في النقطة  $ا$  ، فإذا كان نصف قطر الدائرة م يساوي قطر الدائرة  $\sphericalangle د$  ، كان  $\overline{ب ج}$  قطعاً في الدائرة (م) ويمس الدائرة  $\sphericalangle د$  عند م وكان  $\overline{ا ج}$  يقطع الدائرة  $\sphericalangle د$  في  $و$  ، أثبت أن :  
 ١)  $\widehat{و} (\sphericalangle ب ا ج) = ٩٠^\circ$  . ب) م  $\overline{ا}$  ينصف  $\sphericalangle ب ا ج$  .  
 ج)  $\widehat{و} (\sphericalangle ا م د) = ٤٥^\circ$  .

[١٣] م ،  $\sphericalangle د$  دائرتان متماستان من الخارج في  $ا$  . رسم  $\overrightarrow{ب ج}$  ماراً بالنقطة  $ا$  ويقطع م في ب ، ويقطع  $\sphericalangle د$  في ج ،  
 أثبت أن : القطر  $\overline{ب ص} \parallel$  القطر  $\overline{ج س}$  .

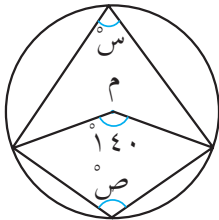
## ٥ : ١١ اختبار الوحدة

[١] ضع دائرة حول رقم الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

١) تستخدم العلاقة  $\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{س}^\circ}{٣٦٠}$  عند حساب :

- ١) مساحة القطاع الدائري . ٢) طول قوس القطاع الدائري الصغير .
- ٣) طول قوس القطاع الدائري الكبير .
- ب) قياس الزاوية المحيطية يساوي :
  - ١) ضعف قياس قوسها المقطوع .
  - ٢) قياس قوسها المقطوع .
  - ٣) نصف قياس قوسها المقطوع .
- ج) قياس الزاوية المركزية يساوي :
  - ١) ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بالقوس .

- (٢) نصف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بالقوس .
- (٣) قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بالقوس .
- (٤) الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون :
- (١) زاوية منفرجة . (٢) زاوية حادة . (٣) زاوية قائمة .
- (هـ) الزاوية المركزية المقابلة لقوس  $180^\circ$  :
- (١) زاوية قائمة . (٢) زاوية مستقيمة . (٣) زاوية حادة .
- (و) الزاويتان المحيطيتان المرسومتان في قوس واحد من الدائرة تكونان :
- (١) متطابقتان . (٢) متكاملتان . (٣) متتامتان .
- [٢]  $\overline{AB}$  وتر في الدائرة م ، نقطة  $s$  منتصف  $\overline{AB}$  . و  $\angle MS = 25^\circ$  .



شكل (٥-٩٦)

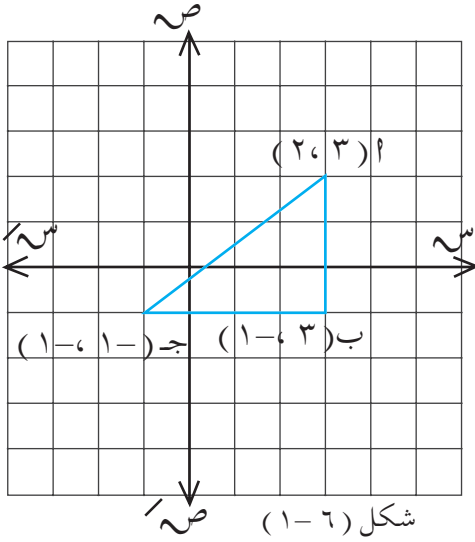
- أوجد  $\angle MS$  .
- [٣] في الشكل (٥-٩٦) :
- م مركز الدائرة ، أوجد
- قيم  $s$  ،  $v$  .
- [٤]  $\angle B$  جزء شكل رباعي دائري ،  $\overline{AB}$  قطر في الدائرة . و  $\angle B = 35^\circ$  .
- أوجد  $\angle A$  .
- [٥] م ، د دائرتان متقاطعتان في  $P$  ، ب ، فإذا كانت  $s$  نقطة على محيط (م) ، ورسم منها مماس يقطع امتداد  $\overline{BP}$  في النقطة ع وكان  $\overline{CD}$  يقطع  $\overline{AB}$  في  $s$  . المطلوب :
- (١) أثبت أن الشكل  $s$  م و ع رباعي دائري .
- (ب) إذا كان  $\angle B = 30^\circ$  ، فأثبت أن  $\triangle PMS$  متساوي الأضلاع .

## الوحدة السادسة

### الهندسة الإحداثية والتحويلات

٦ : ١ البعد بين نقطتين

#### نشاط (١)



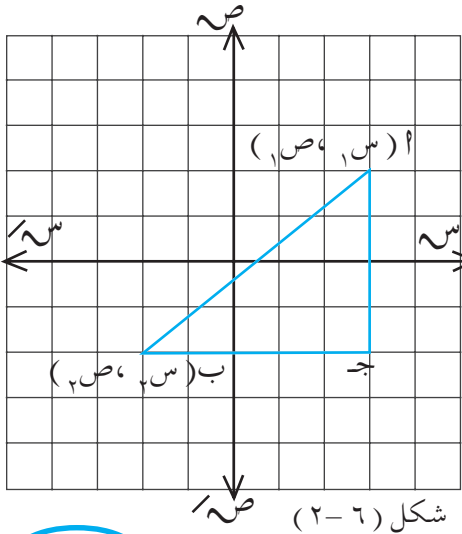
في مستوى إحداثي، ارسم  $\Delta$   $ABC$  حيث  $A(2, 3)$ ،  $B(1, 3)$ ،  $C(1, 1)$ ،  
جـ  $(1, 1)$  [انظر الشكل (١-٦)].

– ما نوع المثلث  $ABC$ ؟

– ما طول  $AB$ ؟ ما طول  $BC$ ؟

– استخدم مبرهنة فيثاغورس لحساب طول  $AC$ .

#### نشاط (٢)



لتكن  $A(1, s)$ ،  $B(1, v)$ ،  $C(1, v)$  [انظر الشكل (٢-٦)].

– ارسم  $ABC$  مستقيماً يوازي محور الصادات،  
ومن  $B$  مستقيماً يوازي محور السينات.

لتكن  $C$  نقطة تقاطع المستقيمين.

- ما إحداثي النقطة ج بدلالة إحداثيات أ ، ب ؟
- ما نوع المثلث أ ب ج ؟
- ما طول  $\overline{ب ج}$ ؟ وما طول  $\overline{أ ج}$  ؟
- استخدم مبرهنة فيثاغورس لحساب طول  $\overline{أ ب}$  ،  
مما سبق نستنتج أنه :

إذا كان أ (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) ، ب (س<sub>٢</sub> ، ص<sub>٢</sub>) فإن :

$$|أ ب| = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2}$$

مثال (١)

أوجد البعد بين النقطتين أ ، ب في الحالات الآتية :

١) أ (٢ ، ٥) ، ب (٢- ، ٢-) ، أ (٢ ، ٣-) ، ب (١ ، ٥-)

[١] البعد بين نقطتين أ ، ب =

الحل:

$$|أ ب| = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2}$$

$$= \sqrt{(٢ - ٢-) + (٥ - ٢-)^2}$$

وحدة طولية  $\sqrt{٦٥} = \sqrt{١٦ + ٤٩} = \sqrt{(٤-) + (٧-)^2}$

$$(٢) |أ ب| = \sqrt{(١ - ٢-) + [(٣-) - ٥-]^2}$$



## الحل:

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{(3-1-)+ (5-4)} = |أ ب|$$

$$\sqrt{37} = \sqrt{1+36} = \sqrt{(1+2-)+ (4-2-)} = |ب ج|$$

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{(2+2)+ (2+1-)} = |ج د|$$

$$\sqrt{37} = \sqrt{1+36} = \sqrt{(3-2)+ (5-1-)} = |د ه|$$

لاحظ أن :

$$|أ ب| = |ج د| ، |ب ج| = |د ه| .$$

∴ الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع لأن فيه كل ضلعين متقابلين

متساويان .

$$\sqrt{74} = \sqrt{25+49} = \sqrt{(3-2-)+ (5-2-)} = |أ ج|$$

$$\sqrt{34} = \sqrt{9+25} = \sqrt{(1+2)+ (4-1-)} = |د ه|$$

## تمارين ومسائل

[ ١ ] أوجد البعد بين النقطتين في كل زوج مما يلي :

أ) س (٠، ٣) ، ص (٤، ٤) ب) س (٤، ٢) ، ص (٥، ٣)

ج) س (٠، ٢) ، ص (٤، ١) د) س (٤، ٣) ، ص (٥، ٣)

هـ) س (٥، ١) ، ص (٢، ٤) و) س (٧، ٤) ، ص (٦، ١)

[ ٢ ] إذا كانت  $م(٣، ٥)$  ،  $ب(٣، ٣)$  ،  $ج(٣-، ٣)$  فبين أن  $\Delta م ب ج$  قائم الزاوية ، وحدد رأس الزاوية القائمة .

[ ٣ ] إذا كانت  $س(١-، ١-)$  ،  $هـ(١-، ٣)$  ، و  $و(١، ٤)$  ، فبرهن أن  $\Delta س هـ و$  متساوي الساقين .

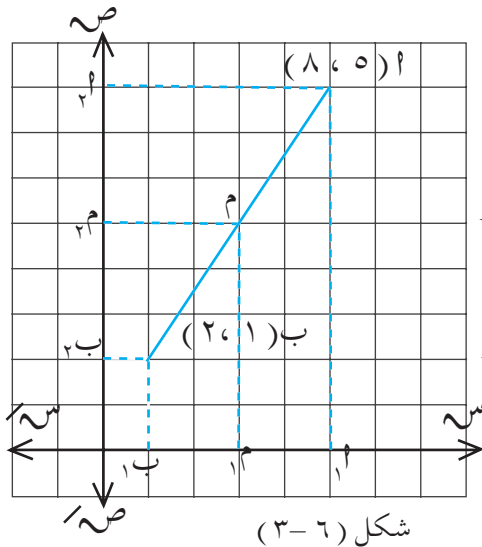
[ ٤ ] إذا كانت  $س(٥، ١)$  ،  $د(٢-، ٦)$  ،  $ل(٥-، ٤)$  ،  $ط(٢، ١-)$  ، فبرهن أن الشكل  $س د ل ط$  متوازي أضلاع .

[ ٥ ] أثبت أن النقاط  $م(٧، ٤)$  ،  $ب(٣، ٢)$  ،  $ج(١-، ٤)$  ،  $س(٣، ٦)$  هي رؤوس معين ، احسب مساحته .

[ ٦ ] أثبت أن النقاط  $هـ(٣، ١)$  ، و  $و(١-، ٤)$  ،  $ل(٧-، ٤-)$  ،  $ط(٣-، ٧-)$  هي رؤوس مستطيل ، أوجد محيطه ومساحته .

## ٦ : ٢ إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة

### نشاط (١)



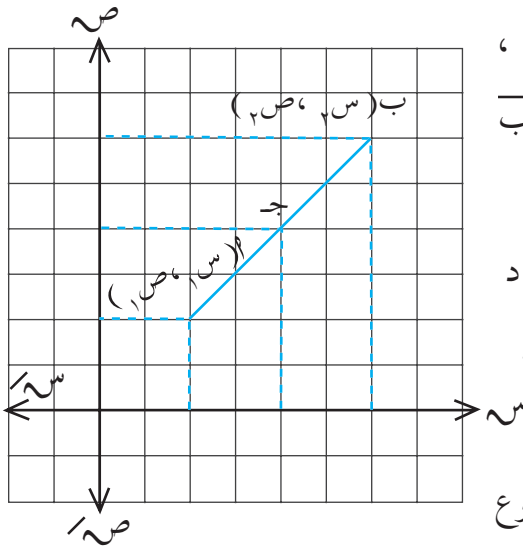
لتكن  $م(٨، ٥)$  ،  $ب(٢، ١)$  نقطتين في مستوى إحداثي [ انظر الشكل (٦-٣) ] ،

- اسقط من  $م$  ، ب عمودين على محور السينات يقطعانه في  $م١$  ،  $ب١$  .  
 - لتكن  $م١$  هي منتصف  $م١ ب١$  ما إحداثي النقطة  $م١$  ؟



- أقم من  $M_1$  عموداً على محور السينات، يلاقي  $\overline{AB}$  في  $M$ . ما الإحداثي السيني للنقطة  $M$ ؟
- أسقط من  $M_2$  ،  $B$  عمودين على محور الصادات تقطعه في النقطتين  $M_1$  ،  $M_2$  على التوالي .
- لتكن  $M_3$  نقطة منتصف  $M_1M_2$  ، ما إحداثي النقطة  $M_3$  .
- أقم من  $M_3$  عمودياً على محور الصادات يلاقي  $\overline{AB}$  في نقطة  $N$  . ما الإحداثي الصادي لنقطة  $N$  .
- هل تنطبق نقطة  $M$  على نقطة  $N$  ؟ تلاحظ أنهما نقطة واحدة .
- ما إحداثي النقطة  $M$  تلاحظ أن نقطة  $M$  منتصف  $\overline{AB}$  .

### نشاط (٢)



شكل (٦ - ٤)

- اختر نقطتين مثل  $A(1, 1)$  ،  $B(4, 4)$  ، ثم ارسم  $\overline{AB}$  .
- [ انظر الشكل (٦ - ٤) ] ،
- باستخدام المسطرة أو الفرغال حدد منتصف  $\overline{AB}$  ولتكن النقطة  $M$  .
- أوجد إحداثي النقطة  $M$  .
- قارن إحداثي النقطة  $M$  بمجموع الإحداثيين السينيين والصاديين للنقطتين  $A$  ،  $B$  .

مما سبق نستنتج أن :

إذا كانت  $أ(س_١، ص_١)$  ،  $ب(س_٢، ص_٢)$  ، فإن إحداثي منتصف  $\overline{أب}$

ولتكن  $م$  هي  $(\frac{س_١+س_٢}{٢}، \frac{ص_١+ص_٢}{٢})$  .

مثال (١)

أوجد منتصف  $\overline{أب}$  في كلٍ من الحالتين التاليتين :

(١)  $أ(١، ٢)$  ،  $ب(٦، ١٤)$  (٢)  $أ(-٨، ٥)$  ،  $ب(٤، -٣)$  .

الحل:

$$(١) م = (\frac{س_١+س_٢}{٢}، \frac{ص_١+ص_٢}{٢}) = (\frac{١+٦}{٢}، \frac{٢+١٤}{٢}) = م = (\frac{٧}{٢}، \frac{١٦}{٢})$$

$$(٢) م = (\frac{س_١+س_٢}{٢}، \frac{ص_١+ص_٢}{٢}) = (\frac{-٨+٥}{٢}، \frac{٤-٣}{٢}) = م = (-\frac{٣}{٢}، \frac{١}{٢})$$

مثال (٢)

إذا كان  $أب$  جزء متوازي أضلاع ، حيث  $أ(٥، ٥)$  ،  $ب(٣، ١)$  ،  
ج  $(-٣، -١)$  ، فأوجد إحداثي النقطة  $و$  .

الحل:

لتكن  $م$  نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع ،  
∴  $م$  منتصف كلٍ من  $\overline{أج}$  ،  $\overline{ب و}$  .

$$\begin{aligned} & \therefore \text{أ} (5, 5) ، \text{ج} (1, -3) ، \\ & \therefore \text{م} = \left( \frac{1-5}{2}, \frac{3-5}{2} \right) = \left( \frac{2}{2}, \frac{2}{2} \right) = (1, 1) \\ & \therefore \text{ب} (1, 3) ، \text{لتكن} \text{د} (س, ص) \\ & \therefore \text{م} = \left( \frac{1+ص}{2}, \frac{3+س}{2} \right) \\ & \therefore 1 = \frac{3+س}{2} \quad \text{ومنها} \quad 2 = 3+س \quad ، \quad 1- = س \\ & \quad 2 = \frac{1+ص}{2} \quad ، \quad \text{ومنها} \quad 4 = 1+ص \quad ، \quad 3 = ص \\ & \text{فتكون} \text{د} (3, 1-). \end{aligned}$$

### تمارين ومسائل

- [ ١ ] أوجد إحداثي نقطة منتصف  $\overline{سص}$  في كلِّ من الحالات الآتية :
- أ)  $س (5, 4)$  ،  $ص (1, 2-)$
- ب)  $س (3-, 5-)$  ،  $ص (1-, 0)$
- ج)  $س (2, 1, 5)$  ،  $ص (3-, 3, 5-)$
- د)  $س (2, 5, 5)$  ،  $ص (2-, 3, 2-)$  .
- [ ٢ ] لتكن  $س (2-, 4-)$  ،  $ص (2, 4)$  ،  $ع (0, 6)$  ، ولتكن  $م$  نقطة منتصف  $\overline{سص}$  ،  $د$  نقطة منتصف  $\overline{صع}$  ، برهن أن  $|د| = \frac{1}{2} |سع|$  .
- [ ٣ ] أ ب ج د مستطيل فيه : أ (2, 3) ، ب (1-, 3) ، ج (1-, 2-) ، د (2, 2-) ، برهن أن القطرين  $\overline{أج}$  ،  $\overline{بد}$  ينصف كلُّ منهما الآخر .

[ ٤ ] أ ب ج د معين فيه : أ ( ٤ ، ٥ ) ، ب ( ١ ، ١ ) ، ج ( -٣ ، -٢ ) ،  
 د ( ٠ ، ٢ ) ، فإذا كانت هـ ، و ، م ، ن منتصفات  $\overline{أب}$  ،  $\overline{بج}$  ،  
 $\overline{جـد}$  ،  $\overline{دأ}$  على الترتيب ، فما نوع الشكل هـ و م ن ؟

### ٦ : ٣ الانعكاس

درست في الصف السابع الانعكاس في أحد المحورين الإحداثيين ،  
 تذكر أن :

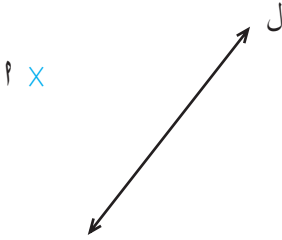
- صورة النقطة ( س ، ص ) بالانعكاس في محور السينات هي النقطة  
 ( س ، - ص )
- صورة النقطة ( س ، ص ) بالانعكاس في محور الصادات هي النقطة  
 ( - س ، ص ) .

### تدريب ( ١ )

أوجد صورة كلٍ من النقاط : أ ( ٢ ، ١ ) ، ب ( -١ ، ١ ) ،  
 ج ( ٠ ، -٤ ) ، د ( ٣ ، ٠ ) بالانعكاس في محور السينات مرة وفي محور  
 الصادات مرة أخرى .

في هذا البند ستتعرف على الانعكاس في مستقيم ( ليس بالضرورة أن  
 يكون هذا المستقيم أحد محوري الإحداثيات ) .

## نشاط (١)

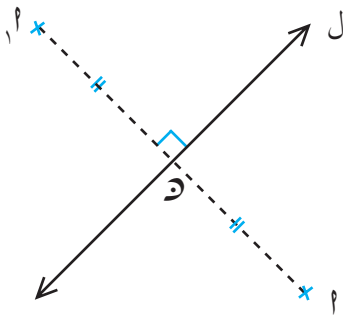


شكل (٥-٦)

- على ورقة شفافة ، ارسم مستقيم ل ،
- اختر نقطة P خارجة عن ل [ انظر الشكل (٥ - ٦) ] .
- اطو الورقة حول ل وعين عليها النقطة المقابلة للنقطة P ، سمها P' .
- افتح الورقة ، وارسم P P' .
- حدد نقطة تقاطع ل مع P P' ، سمها Q .

- تحقق من أن  $P P' \perp L$  ، وأن  $|P Q| = |P' Q|$  .

بالنشاط السابق نكون قد حددنا النقطة P صورة النقطة P بالانعكاس في المستقيم ل ، يسمى ل محور الانعكاس . وبصورة عامة :

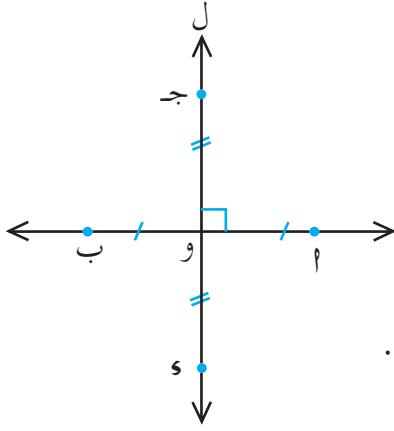


شكل (٦-٦)

لإيجاد صورة النقطة P بالانعكاس في المستقيم ل ، نرسم من P قطعة مستقيمة عمودية على المستقيم ل ونمدّها على استقامتها بقدر طولها إلى P' ، فتكون P' صورة P بالانعكاس في ل ، كما في الشكل (٦ - ٦) :

مما سبق يمكن استنتاج أن :

إذا كان  $أ$  صورة  $أ$  بالانعكاس في  $ل$ ، فإن  $ل \perp \overline{أأ}$ ،  $||دأ|| = ||دأ||$  حيث  $د$  هي نقطة تقاطع  $ل$  مع  $\overline{أأ}$  والعكس صحيح .



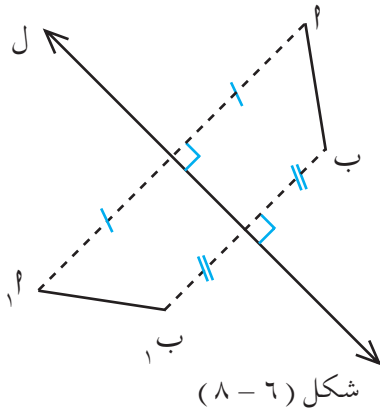
شكل (٦ - ٧)

تأمل الشكل (٦ - ٧)، تلاحظ أن :

- صورة  $أ$  بالانعكاس في  $ل$  هي  $ب$  .
- صورة  $أ$  بالانعكاس في  $م$  هي  $أ$  نفسها .
- صورة  $ب$  بالانعكاس في  $ل$  هي  $أ$  .
- صورة  $ج$  بالانعكاس في  $م$  هي  $س$  .
- صورة  $ج$  بالانعكاس في  $ل$  هي  $ج$  نفسها .
- صورة  $و$  بالانعكاس في  $ل$  هي  $و$  نفسها .
- صورة  $و$  بالانعكاس في  $م$  هي  $و$  نفسها .

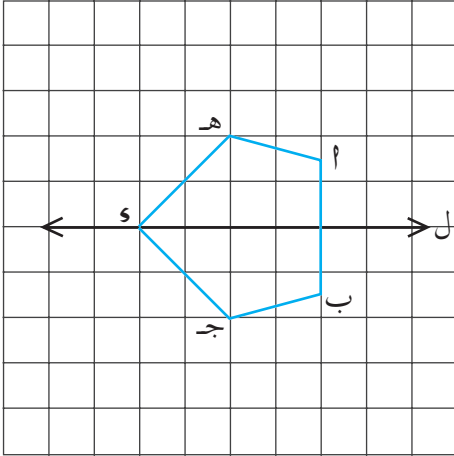
مما سبق نجد أنه :

إذا كانت النقطة  $س$  واقعة على محور الانعكاس ، فإن صورتها هي  $س$  نفسها .



شكل (٦ - ٨)

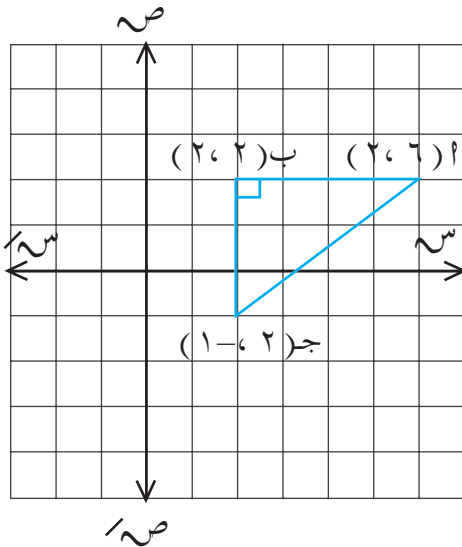
- لإيجاد صورة  $أ$  بالانعكاس في  $ل$ ، نوجد صورة كل من  $أ$ ،  $ب$  بهذا الانعكاس ثم نصل بين الصورتين فنحصل على  $\overline{أ'ب'}$ ، هي صورة  $أب$ ، كما في الشكل (٦ - ٨) :

**تدريب (٢)**


من الشكل (٦ - ٩) ، أكمل الجدول التالي ، حيث  $\leftrightarrow$  ل هو محور الانعكاس .

شكل (٦ - ٩)

الشكل	م	هـ	م هـ	س	س هـ	جـ	جـ ب
الصورة							هـ م

**خواص الانعكاس :**
**نشاط (٢)**


شكل (٦ - ١٠)

على الشكل (٦ - ١٠) :  
 م ب ج مثلث ، إحداثيات رؤوسه ، هي : (٢ ، ٦) ، (٢ ، ٢) ، (١ - ، ٢) على الترتيب .

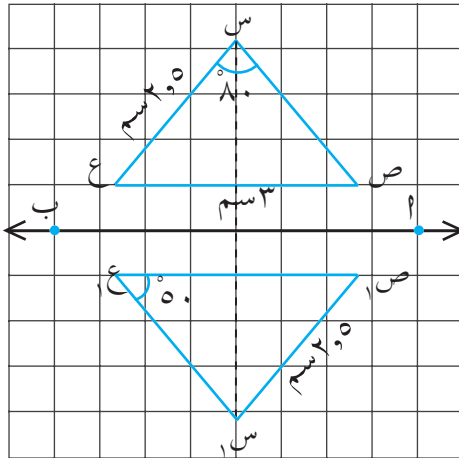
- انقل الشكل على ورقة رسم بياني ، ثم ارسم صورته بالانعكاس في محور الصادات ، سمّها م ، ب ، ج .  
 - باستخدام قانون البعد بين نقطتين

- أوجد :  $|AB|$  ،  $|AB \text{ جـ}|$  ،  $|A \text{ جـ}|$  ،  $|A \text{ بـ}|$  ،  $|A \text{ جـ}|$  ،  $|A \text{ بـ}|$  ،  $|A \text{ جـ}|$  ،  $|A \text{ بـ}|$  ،  $|A \text{ جـ}|$  ،  $|A \text{ بـ}|$  .
- قارن بين طول كل ضلع في  $\Delta A \text{ بـ جـ}$  وطول صورته في  $\Delta A \text{ بـ جـ}$  .  
 ماذا تستنتج بالنسبة لطول كل ضلع وطول صورته بالانعكاس ؟
- باستخدام المنقلة ، قس زوايا كل من المثلثين  $A \text{ بـ جـ}$  ،  $A \text{ بـ جـ}$  .  
 ماذا تلاحظ بالنسبة لقياس كل زاوية وقياس صورتها بالانعكاس ؟
- من النشاط السابق نستنتج أن :

١ – الانعكاس في محور يحفظ الأطوال .

٢ – الانعكاس في محور يحفظ قياس الزوايا .

مثال (١)



شكل (٦-١١)

في الشكل (٦-١١) :

$\Delta A \text{ بـ جـ}$  صورة  $\Delta A \text{ بـ جـ}$  بالانعكاس في المحور  $A \text{ بـ}$  .

– بالاستعانة بالبيانات الموضحة على الشكل ، وباستخدام خواص الانعكاس ،

أوجد :

(١) قياس كل من :

$\angle A$  ،  $\angle B$  ،  $\angle C$  ،  $\angle A'$  ،  $\angle B'$  ،  $\angle C'$  .

(٢)  $|AB|$  ،  $|A \text{ بـ}|$  ،  $|A \text{ جـ}|$  ،  $|A \text{ بـ}|$  ،  $|A \text{ جـ}|$  ،  $|A \text{ بـ}|$  .

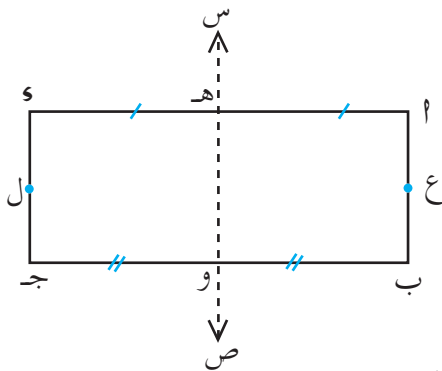


## الحل:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \Delta س_1 ص_1 ع_1 \text{ صورة } \Delta س ص ع \\
 \therefore \text{وه } (\text{س} \times \text{ص}) = ٨٠ = \text{وه } (\text{ص} \times \text{ع}) \\
 \text{وه } (\text{ص} \times \text{ع}) = ٨٠ = (\text{س} \times \text{ص}) - ١٨٠ = \text{وه } (\text{ص} \times \text{ع}) \text{ (لماذا؟)} \\
 \text{وه } (\text{ع} \times \text{ص}) = \text{وه } (\text{ع} \times \text{ص}) \\
 \text{وه } (\text{ص} \times \text{ع}) = \text{وه } (\text{ص} \times \text{ع}) \\
 (2) \quad |س ص| = |س_١ ص_١| = ٢,٥ \text{ سم} \\
 |ص ع| = |ص_١ ع_١| = ٣ \text{ سم} \\
 |س ع| = |س_١ ع_١| = ٢,٥ \text{ سم (لماذا؟)}
 \end{aligned}$$

## التناظر - محور التناظر:

## نشاط (٣)



شكل (٦-١٢)

على الشكل (٦-١٢):

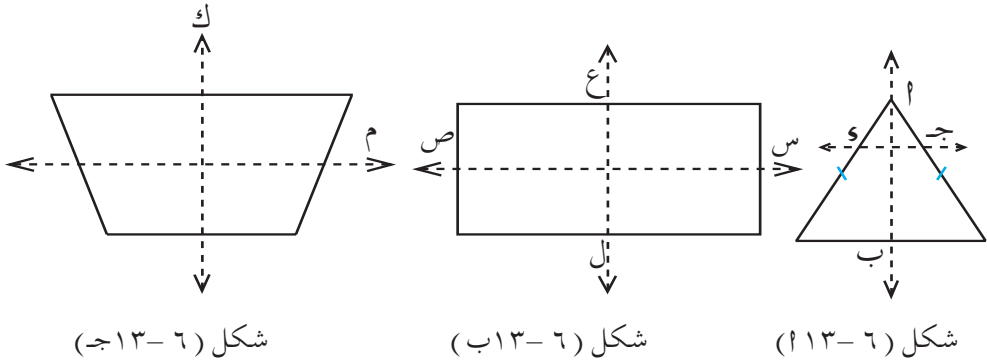
- أ ب ج د مستطيل .
- حدد صور النقاط أ، ع، و، ج، ل، هـ ، بالانعكاس في المحور س ص .
- أين تقع صورة كل نقطة بالنسبة للمستطيل ( داخله ، خارجه ، عليه ) ؟
- اختر نقاطاً أخرى من المستطيل ، تحقق من أن صورها هي نقاط على المستطيل نفسه .

تلاحظ أن صورة كل نقطة من المستطيل بالانعكاس في  $\vec{S}$  هي نقطة على المستطيل نفسه .  
من ذلك نستنتج :

إذا كانت صورة كل نقطة من شكل في المحور  $\vec{L}$  هي نقطة على الشكل نفسه ، فإن  $\vec{L}$  يسمى محور تناظر ، ونقول أن الشكل متناظر حول هذا المحور .

**مثال ( ١ )** في كل شكل من الأشكال ( ٦ - ١٣ ، ب ، ج ) يوجد

محورا انعكاس حدد أيهما محور تناظر للشكل .



شكل (٦-١٣-ج)

شكل (٦-١٣-ب)

شكل (٦-١٣-أ)

**الحل :**

في الشكل ( ٦ - ١٣ ) :  $\vec{A}$  محور تناظر له ، بينما  $\vec{B}$  لا يمثل محور تناظر للشكل لأن صورة النقطة  $A$  مثلاً بالانعكاس في  $\vec{B}$  تقع داخل الشكل وليس عليه ( تحقق من ذلك ) .

- في الشكل ( ٦ - ١٣ ب ) : كل من  $\overleftrightarrow{س ص}$  ،  $\overleftrightarrow{ع ل}$  يمثل محور تناظر للشكل .

- في الشكل ( ٦ - ١٣ ج ) :  $\overleftrightarrow{ك}$  محور تناظر له ، بينما  $\overleftrightarrow{م}$  ليس كذلك .  
لماذا ؟

### مثال (٣)

١ ب ب ١ ، شكل رباعي متناظر حول محور الصادات ، إذا كانت  $١(٧، ٣)$  ،  $١(٣، ٧)$  . عين إحداثي  $١$  ،  $١$  ثم ارسم الشكل .

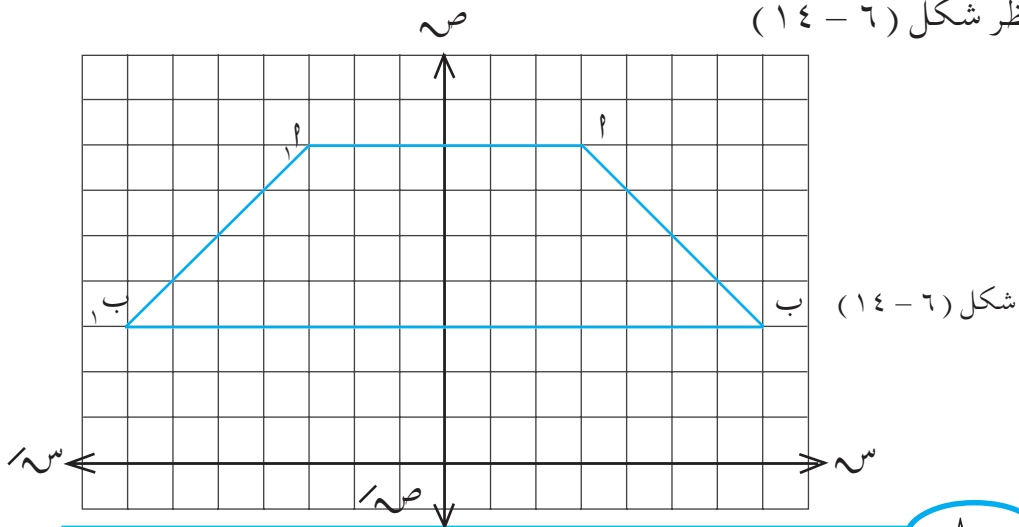
### الحل:

حيث أن الشكل  $١ ب ب ١$  متناظر حول محور الصادات ، فإن  $١$  ،  $١$  هما صورتا  $١$  ،  $١$  بالانعكاس في محور الصادات .

$$١(٧، ٣) \therefore ١(٧، ٣-)$$

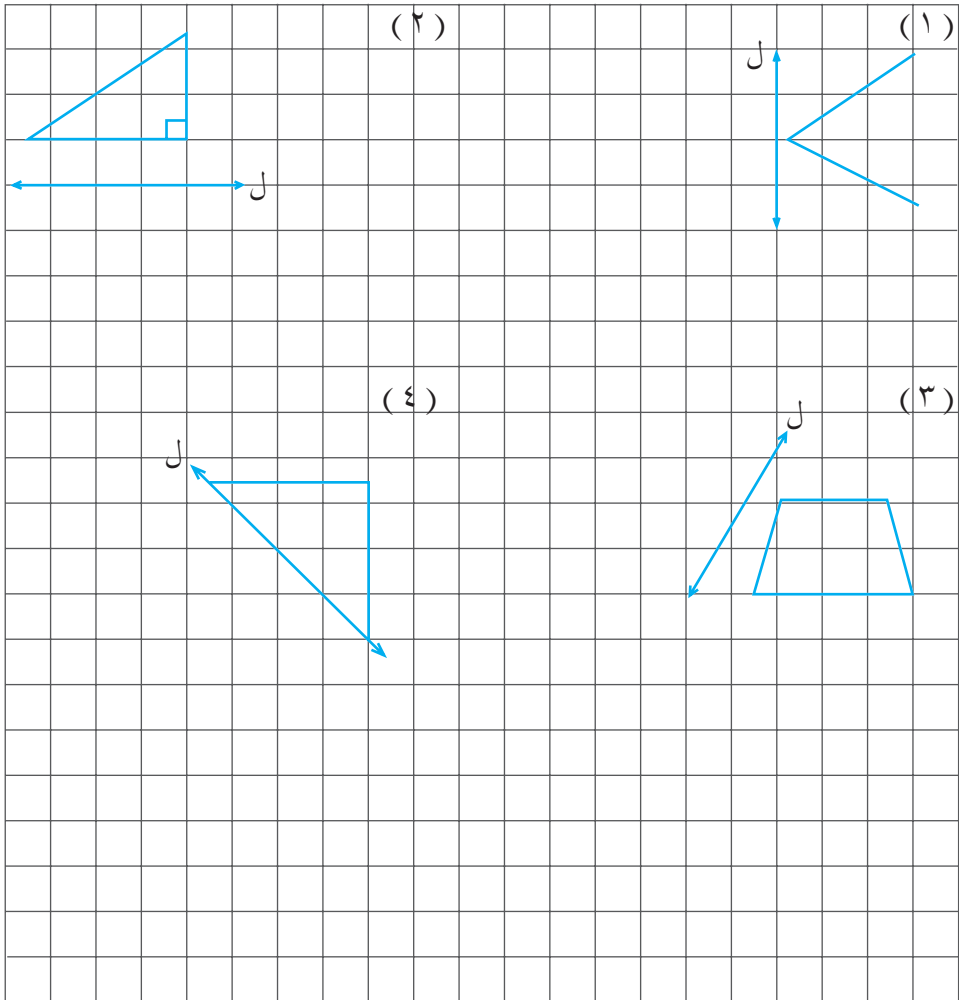
$$١(٣، ٧) \therefore ١(٣، ٧-)$$

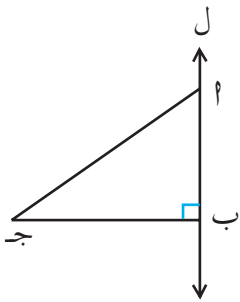
انظر شكل ( ٦ - ١٤ )



## تمارين ومسائل

- [ ١ ] أوجد صورة كلٍ من النقاط التالية : س ( ١ ، ٣ ) ، ص ( ٢ ، -٣ ) ، ع ( -٣ ، ٢ ) ، ل ( ٠ ، ٤ ) ،  
 (٢) بالانعكاس في محور السينات ، ب) بالانعكاس في محور الصادات .  
 [ ٢ ] ارسم صورة كلٍ مما يأتي بالانعكاس في  $\overleftrightarrow{ل}$  :





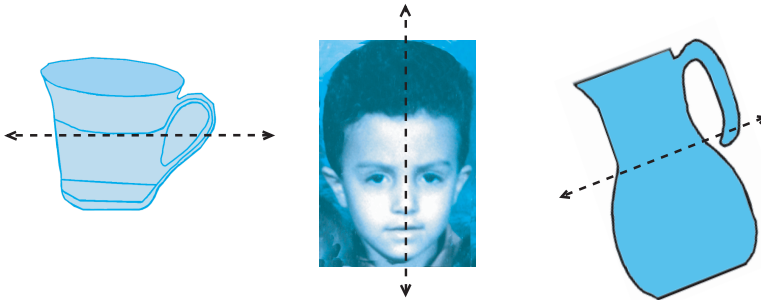
شكل (٦-١٥)

[٣] ارسم صورة المثلث ا ب ج [شكل (٦-١٥)]

بالانعكاس في  $\overleftrightarrow{ل}$  ، ثم أكمل ما يلي :

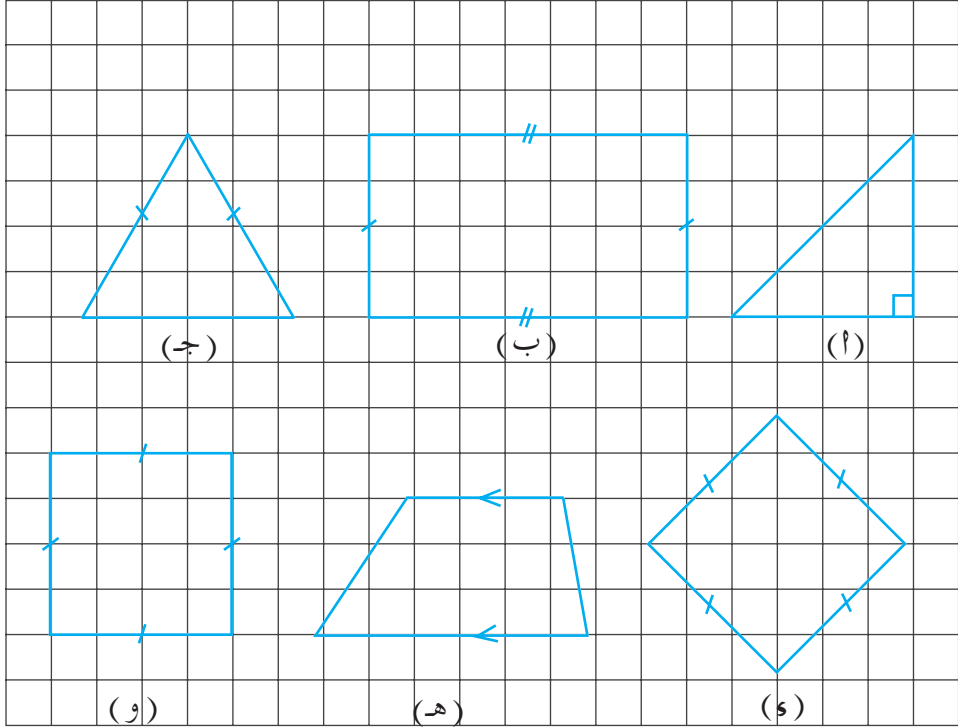
- ١ ■ صورة ا هي ا نفسها ، صورة ب هي ...
- ٢ ■ صورة ج هي ج<sub>١</sub> ، صورة ج<sub>١</sub> هي ...
- ٣ ■ صورة ج<sub>٢</sub> هي ج<sub>١</sub> ب ، صورة ج<sub>١</sub> ب هي ...
- ٤ ■ المثلث ا ج ج<sub>١</sub> متساوي الساقين لأن ...
- ٥ ■  $\overleftrightarrow{ل}$  محور تناظر المثلث ...
- ٦ ■ يسمى الشكل ا ج ج<sub>١</sub> ... حول  $\overleftrightarrow{ل}$  .
- ٧ ■ و (ا ب ج<sub>١</sub>) = ...

[٤] فيما يلي: ضع علامة (✓) أسفل الشكل المتناظر بالنسبة للمحور المعطى:



شكل (٦-١٧)

[ ٥ ] تأمل الأشكال التالية ، وعين المتناظر منها ، وارسم محور تناظر له .



[ ٦ ] كم محور تناظر لكلٍ من :

١) المربع (ب) المستطيل (ج) المثلث المتساوي الساقين (د) الدائرة .

[ ٧ ] ارسم المربع الذي رؤوسه أ (٢ ، ٢) ، ب (٢ ، ٨) ، ج (٨ ، ٨) ، د (٨ ، ٢) ، ثم ارسم صورته بالانعكاس في :

١) المحور الصادي  $\overleftrightarrow{ص هـ}$  .

٢) المحور  $\overleftrightarrow{م ن}$  حيث م (٢ ، ٥) ، ن (٨ ، ٥) .

هل المربع أ ب ج د متناظر بالنسبة للمحور  $\overleftrightarrow{م ن}$  ؟ علل إجابتك ؟

## ٦ : ٤ الانسحاب

سبق وأن تعرفت على مفهوم الانسحاب .  
تذكر أن :

- صورة النقطة ( س ، ص ) تحت تأثير انسحاب باتجاه محور السينات وبمقدار  $d$  من الوحدات هي النقطة ( س +  $d$  ، ص ) .
- صورة النقطة ( س ، ص ) تحت تأثير انسحاب باتجاه محور الصادات وبمقدار  $d$  من الوحدات هي النقطة ( س ، ص +  $d$  ) .
- ويكون الاتجاه موجباً أو سالباً بالنسبة لأي من المحورين بحسب إشارة  $d$  .

**تدريب** أوجد صورة كلٍ من النقاط التالية : ( ١ ، ٣ ) ، ( ١ ، -١ ) ،

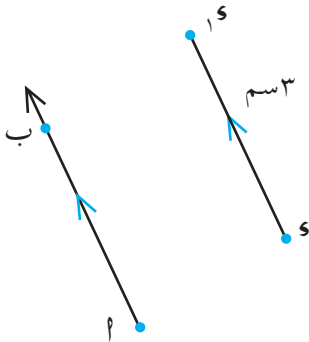
( ٤ ، -٢ ) ، ( ٠ ، ٢- ) ، ( ٢ ، ٠ ) ، تحت تأثير انسحاب :

أ) بالاتجاه الموجب محور السينات بمقدار وحدتين .

ب) بالاتجاه السالب محور الصادات بمقدار ٣ وحدات .

في هذا البند ستتعرف على الانسحاب بشكل عام وفي أي اتجاه كان .

### نشاط (١)



شكل (٦ - ١٨)

في الشكل (٦ - ١٨) :  $s \neq a$

- ارسم  $\overline{ss}$  بحيث :  $\overline{ss} \parallel \overline{a}$

$$|ss| = |a|$$

بهذا الإجراء تكون قد عينت  $s$  صورة  $s$  ،

بانسحاب مقداره  $s$  وباتجاه  $a$  .

- لتكن هـ نقطة مختلفة عن و بحيث هـ  $\notin$   $\overleftrightarrow{AB}$  ، عين هـ<sub>١</sub> صورة هـ بالانسحاب السابق نفسه .

- تحقق من أن هـ هـ<sub>١</sub> //  $\overleftrightarrow{AB}$  ،  $|هـ هـ<sub>١</sub>| = ٣سم$  ،  
من النشاط السابق نستنتج أن :

١ - الانسحاب يتحدد بعنصرين هما : المقدار (المسافة) والاتجاه .

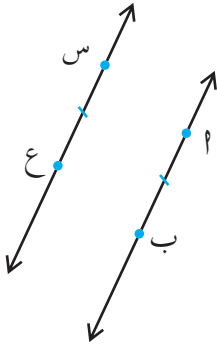
٢ - لأي نقطة س من المستوى ، يمكن تعيين الصورة س<sub>١</sub> بالانسحاب محدد مقداره واتجاهه .

٣ - تكون النقطة ص<sub>١</sub> صورة للنقطة ص بالانسحاب مقداره  $d$  وحدة طولية واتجاهه  $\overleftrightarrow{AB}$  .

إذا كان (١ :  $\overleftrightarrow{AB}$  //  $\overleftrightarrow{V_1V}$ )

(٢)  $|ص ص<sub>١</sub>| = d$  .

مثال (١)



شكل (٦ - ١٩)

في الشكل (٦ - ١٩) :  $\overleftrightarrow{SC} // \overleftrightarrow{AB}$  ،

$|AB| = |SC|$  .

(١) أوجد صورة A بالانسحاب مسافته  $|SC|$  واتجاهه  $\overleftrightarrow{SC}$  .

(ب) هل ع صورة س بالانسحاب السابق ؟

(ج) إذا كان  $|AS| = |SC|$  فهل A صورة س

بالانسحاب السابق نفسه ؟

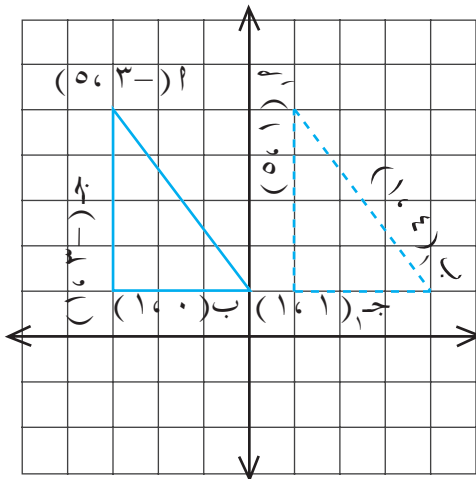


## الحل:

- ١) صورة ١ بالانسحاب المعرف سابقاً هي النقطة ب ، لأن  $\vec{AB} \parallel \vec{SE}$  ،  
 $|AB| = |SE|$  .  
 ب) نعم لأن  $|SE|$  هي نفس مسافة الانسحاب واتجاهه نفس اتجاه الانسحاب .  
 ج) لا لأن  $\vec{SA} \not\parallel \vec{SE}$

### خواص الانسحاب :

#### نشاط (٢)



شكل (٦ - ٢٠)

في الشكل (٦ - ٢٠) :  
 ١ ب ج مثلث ، إحداثيات رؤوسه  
 (٥ ، ٣- ) ، (١ ، ٠) ، (١ ، ٣- )  
 على التوالي .

- انقل الشكل على ورقة رسم بياني ،  
 ثم ارسم صورته بانسحاب مسافته  
 ٤ وحدات وباتجاه محور السينات

الموجب، تحصل على الصور ١ ، ب ، ج .

- ما إحداثيات كل من ١ ، ب ، ج ؟

- باستخدام قانون البعد بين نقطتين

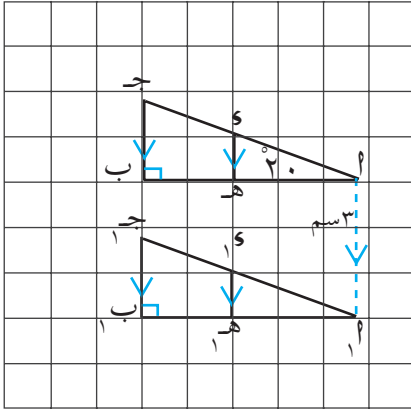
أوجد كلاً من  $|AB|$  ،  $|BC|$  ،  $|AC|$  ،  $|A'B'|$  ،  $|B'C'|$  ،  $|A'C'|$  ،  $|AB|$  ،  $|BC|$  ،  $|AC|$  .

- ماذا تلاحظ بالنسبة لأطوال أضلاع المثلث ١ ب ج وأطوال أضلاع المثلث ٢ ب ج ؟  
 – استخدم المنقلة لقياس زوايا المثلث ١ ب ج و لقياس زوايا المثلث ٢ ب ج .  
 – ماذا تلاحظ بالنسبة لقياس كل زاوية في المثلث ١ ب ج وقياس صورتها في المثلث ٢ ب ج ؟

ستلاحظ أن : ( ١ ) طول القطع المستقيمة يبقى ثابتاً بعد الانسحاب .  
 ( ٢ ) قياس الزوايا يبقى هو نفسه بعد الانسحاب .  
 من النشاط السابق نستنتج أن :

( ١ ) الانسحاب يحافظ على الأطوال .  
 ( ٢ ) الانسحاب يحافظ على قياس الزوايا .

مثال (٢)



شكل (٦ - ٢١)

في الشكل ( ٦ - ٢١ ) :  
 $\Delta$  ١ ب ج صورة المثلث ١ ب ج بانسحاب مقداره ٣ وحدات طولية واتجاهه ج ب .  
 فإذا كان  $|ج أ| = ٢$  سم ،  $ج ب \perp أ ب$  ،  
 $و ه \parallel ج ب$  ،  $و ه ( أ ج ) = ٢٠$  ،  
 فأجب عما يلي :

- (١) أوجد  $|أ أ'|$   
 (٢) بين أن  $ج ب \perp أ ب$   
 (٣) بين أن  $و ه \parallel ج ب$   
 (٤) أوجد  $و ه ( ج ب )$  .

## الحل:

- (١) ∴ ١ صورة ١ بانسحاب مقداره = ٣ وحدات  
 ∴  $|١١١| = ٣$  وحدات طولية
- (٢) ∴ ١ صورة ب ، و (ب) = ٩٠ « لأن  $\overline{جَب} \perp \overline{أَب}$  »  
 ∴ و (ب) = ٩٠ « خواص الانسحاب »
- (٣) ∴ هـ ١ صورة هـ .  
 ∴ و (هـ) = و (١هـ) = و (هـ) لكن و (هـ) = و (ب) « لأن  $\overline{وَه} \parallel \overline{ب_ج}$  »  
 ∴ و (هـ) = و (ب) = و (١هـ) = و (ب) ∴  
 ∴  $\overline{١هـ} \parallel \overline{ب_ج}$  .
- (٤) في  $\Delta$  أ ب ج ، ∴ و (ب) = ٩٠ ، و (أ) = ٢٠  
 ∴ و (ج) = ٧٠  
 لكن و (ج) = و (١ج) = و (ج) « خواص الانسحاب »  
 ∴ و (ج) = ٧٠ .

## مثال (٣)

$\Delta$  س<sub>١</sub> ص<sub>١</sub> ع<sub>١</sub> صورة المثلث س ص ع بالانعكاس في محور السينات ،  
 حيث س (١- ، ٣) ، ص (١- ، ١) ، ع (١- ، ٣) ، فإذا كان  $\Delta$  س<sub>٢</sub> ص<sub>٢</sub> ع<sub>٢</sub>  
 صورة  $\Delta$  س<sub>١</sub> ص<sub>١</sub> ع<sub>١</sub> بانسحاب مقداره ٤ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور  
 السينات ، فأوجد إحداثيات رؤوس المثلث س<sub>٢</sub> ص<sub>٢</sub> ع<sub>٢</sub> .

نوجد أولاً إحداثيات رؤوس المثلث س<sub>١</sub> ص<sub>١</sub> ع<sub>١</sub> كما يلي:

$$س(٣، ١) \leftarrow س_١(٣-، ١-)$$

$$ص(١، ١) \leftarrow ص_١(١-، ١-)$$

$$ع(١، ٣) \leftarrow ع_١(١-، ٣-)$$

ثم نوجد صور س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>، ع<sub>١</sub> بانسحاب مقداره ٤ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات كما يلي:

$$س(٣، ١) \leftarrow س_٢(٣-، ١- + ٤) = س_٢(٣-، ٣)$$

$$ص(١، ١) \leftarrow ص_٢(١-، ١- + ٤) = ص_٢(١-، ٣)$$

$$ع(١، ٣) \leftarrow ع_٢(١-، ٣- + ٤) = ع_٢(١-، ١)$$

### تمارين ومسابئلة

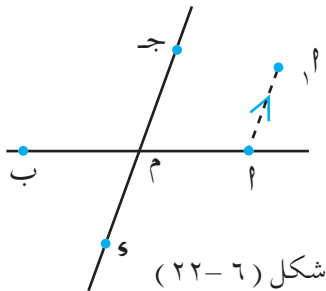
[١] عين العبارات الصحيحة وصبّ العبارات الخطأ فيما يلي:

إذا انسحب شكل هندسي في المستوى فإن:

١) كل نقطة من نقاط الشكل تتحرك نفس المسافة.

ب) جميع القياسات والمسافات بين أجزاء الشكل تبقى ثابتة.

ج) هناك دائماً نقطة ثابتة. د) يتغير اتجاه الشكل.



شكل (٦-٢٢)

[٢] في الشكل (٦ - ٢٢):

١) صورة ه بانسحاب مسافته = |م ج|،

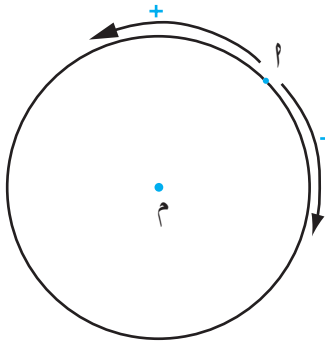
باتجاه م ج. عين:

٢) صورة و بانسحاب مسافته = |م و|،

باتجاه م و.

- ( ٢ ) ب ١ صورة ب بانسحاب مسافته =  $|م ج|$  ، باتجاه  $\overrightarrow{م س}$  .
- ( ٣ ) ب ٢ صورة ب بانسحاب مسافته =  $|م ج|$  ، باتجاه  $\overrightarrow{م ج}$  .
- [ ٣ ] ١ ، ب نقطتان في المستوى الإحداثي حيث ١ ( ٣ ، ٢ ) ، ب ( ١ ، ١ ) ، ح انسحاب ينقل ب إلى ب ١ ( ١ ، ٤ ) ، حدد عناصر ح ( مسافته ، اتجاهه ) ثم أوجد إحداثي ١ صورة ١ بهذا الانسحاب .
- [ ٤ ] ١ ب ج مثلث ، إحداثيات رؤوسه على الترتيب هي : ( ١ ، -١ ) ، ( ٣ ، -١ ) ، ( ٤ ، ١ ) ، أوجد صورة  $\Delta$  ١ ب ج تحت تأثير : ( ١ ) انعكاس في محور الصادات .
- ( ٢ ) انسحاب مسافته = ٣ وحدات طولية وفي الاتجاه الموجب لمحور السينات .

## ٦ : ٥ الدوران

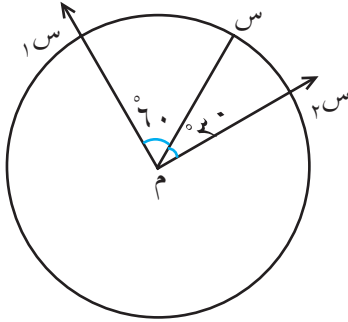


شكل ( ٦ - ٢٣ )

في الشكل ( ٦ - ٢٣ ) ، دائرة مركزها م ، ١ إحدى نقاطها ، للانتقال على الدائرة انطلاقاً من النقطة ١ ، يمكنك أن تسلك أحد الاتجاهين :

الأول : اتجاه عقارب الساعة ، ويسمى الاتجاه السالب .

الآخر : عكس اتجاه عقارب الساعة ، يسمى الاتجاه الموجب .



شكل (٦ - ٢٤)

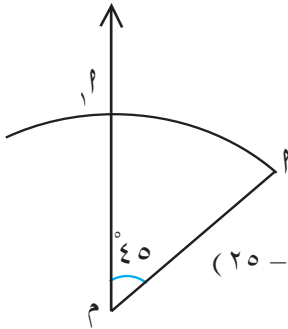
في الشكل (٦ - ٢٤) ، س نقطة على الدائرة (م) .

- حددنا النقطة س<sub>١</sub> على الدائرة بحيث يكون الاتجاه من س إلى س<sub>١</sub> هو الاتجاه الموجب ، وه  $(\times \text{ س م س}_1) = 60^\circ$  ، نقول أن : س<sub>١</sub> صورة س بدوران مركزه

(م) ، قياسه  $(60 +)$  ونرمز لهذا الدوران بالرمز  $(\text{ م } ، + 60)$  .

- حددنا النقطة س<sub>٢</sub> على الدائرة بحيث يكون الاتجاه من س إلى س<sub>٢</sub> هو الاتجاه السالب ، وه  $(\times \text{ س م س}_2) = 30^\circ$  ، لذلك نقول أن :

س<sub>٢</sub> صورة س بدوران مركزه (م) ، قياسه  $(30 -)$  ، ونرمز لهذا الدوران بالرمز  $(\text{ م } ، - 30)$  .



شكل (٦ - ٢٥)

### نشاط (١)

- حدد في مستوى النقطتين م ، P .

- ارسم  $\overline{م P}$  .

- افتح الفرجال فتحة بقدر  $|م P|$  .

واركزه على م ، ثم ارسم قوساً من P بالاتجاه الموجب .

- باستخدام المنقلة ، ارسم زاوية قياسها  $45^\circ$  بحيث م A أحد ضلعيها ،

ضلعاها الآخر م A (شعاع يبدأ من م ويقطع القوس في نقطة P) .

[ انظر الشكل (٦ - ٢٥) ] .

- تحقق من أن  $|م P| = |م A|$  .

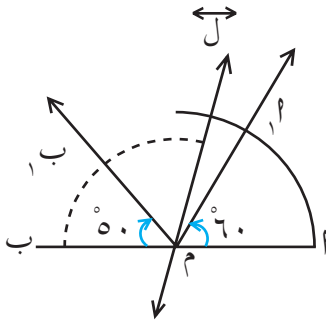
في النشاط السابق تكون قد عينت النقطة ٢، صورة النقطة ١ بالدوران (م، + ٤٥) .

– اختر نقاطاً أخرى في المستوى وحدد صورها بالدوران السابق نفسه ،  
تحقق في كل مرة أن البعد بين كل نقطة ومركز الدوران يساوي البعد بين  
صورة هذه النقطة والمركز نفسه .

من النشاط السابق نستنتج أنه :

- ١ – يمكن تعيين صورة أي نقطة في المستوى بدوران محدد المركز والقياس .
- ٢ – تكون النقطة س<sub>١</sub> صورة النقطة س بدوران مركزه (م) وقياسه (هـ)  
إذا كان:  $|م س| = |م س_١|$  ، و  $\angle م س س_١ = \angle م س س_١$  = هـ .  
يكون قياس الدوران موجباً إذا كان الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة .  
ويكون سالباً إذا كان مع اتجاه عقارب الساعة .

### مثال (١)



شكل (٦ - ٢٦)

- في الشكل (٦ - ٢٦) :  $\overline{أ ب}$   
تقطع  $\overleftrightarrow{ل}$  في النقطة م ، أوجد :
- (١) صورة أ بالدوران (م، + ٦٠)
  - (٢) صورة ب بالدوران (م، - ٥٠)
  - (٣) صورة م بكلٍ من الدورانين السابقين .

### الحل :

(١) صورة أ بالدوران (م، + ٦٠) هي أ<sub>١</sub> [ انظر شكل (٦ - ٢٦) ] . لاحظ أن

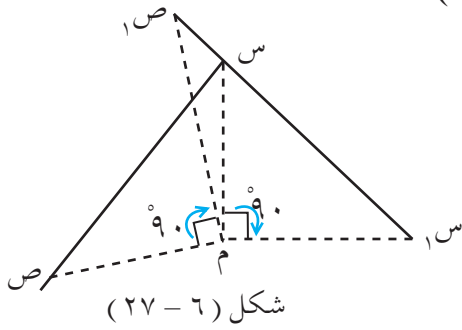
وه  $(\alpha \text{ م } \alpha) = 60^\circ$  ،  $| \alpha \text{ م } | = | \alpha \text{ م } |$  ، والاتجاه من  $\alpha$  إلى  $\alpha$  عكس اتجاه حركة عقارب الساعة ( اتجاه موجب ) .

( ٢ ) بنفس الطريقة السابقة [ انظر الشكل ( ٦ - ٢٦ ) ] حيث ب  $\alpha$  صورة ب بالدوران ( م ،  $- 50^\circ$  ) والاتجاه من ب إلى ب  $\alpha$  ، مع اتجاه حركة عقارب الساعة ( اتجاه سالب ) .

( ٣ ) صورة م بكل من الدورانين السابقين هي م نفسها ، لأنها مركز الدوران

**مثال ( ٢ )** ارسم صورة  $\overline{س ص}$  تحت تأثير: ( ١ ) و ( م ،  $- 90^\circ$  )

( ٢ ) و ( م ،  $+ 90^\circ$  ) .

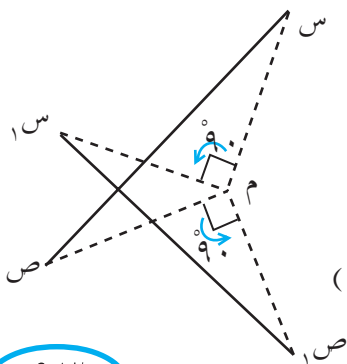


**الحل:**

[ انظر الشكل ( ٦ - ٢٧ ) ] .

الاتجاه هنا سالب ( مع

اتجاه عقارب الساعة ) .



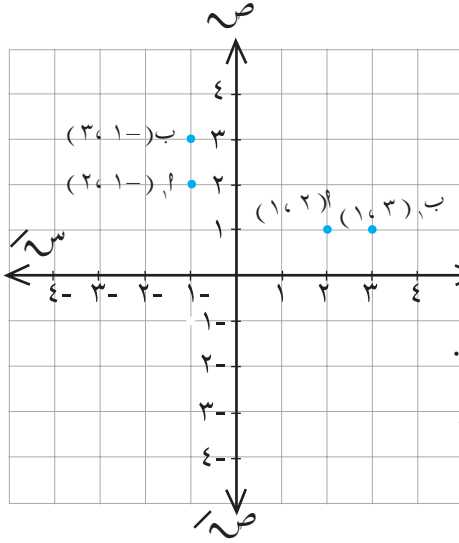
انظر الشكل ( ٦ - ٢٨ ) .

الاتجاه هنا موجب

( عكس اتجاه عقارب الساعة )



## نشاط (٢)



شكل (٦ - ٢٩)

- على مستوى إحداثي، حدد النقطتين  $(1, 2)$  أ ،  $(3, 1)$  ب كما في الشكل (٦ - ٢٩).
- عين أ صورة أ بالدوران  $(م, ٩٠+)$ .
- عين ب صورة ب بالدوران  $(م, ٩٠-)$ .
- ما إحداثي أ ؟ قارن بإحداثي أ .
- ما إحداثي ب ؟ قارن بإحداثي ب .
- تلاحظ أن أ  $(2, 1)$  ، ب  $(1, 3)$  .
- اختر نقاطاً أخرى في المستوى، عين صورها بالدوران  $(م, ٩٠+)$  مرة وبالدوران  $(م, ٩٠-)$  مرة أخرى، قارن بين إحداثي كل نقطة وإحداثي صورتها، ماذا تلاحظ ؟

من النشاط السابق نستنتج أنه :

لأي نقطة ( س ، ص ) في المستوى الإحداثي :

- أ) صورة النقطة ( س ، ص ) تحت تأثير  $(و, ٩٠+)$  هي النقطة  $(-ص, س)$  .
- ب) صورة النقطة ( س ، ص ) تحت تأثير  $(و, ٩٠-)$  هي النقطة  $(ص, -س)$  .
- و هي نقطة الأصل  $(٠, ٠)$  .

مثال (٣) أوجد صورة كل نقطة من النقاط الآتية :

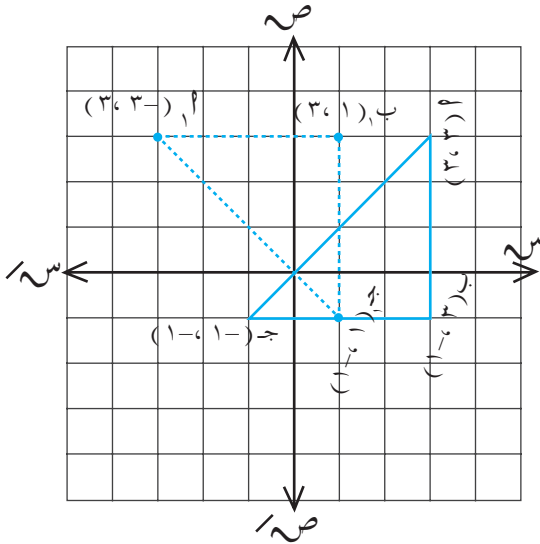
أ (٠، ٣)، ب (٢، ٣)، ج (٢، ٠)، د (٠، ٠)، هـ (١-، ٢-)  
 تحت تأثير (١) د (٠، ٩٠+) و (٢) د (٠، ٩٠-) حيث و نقطة الأصل.

الحل:

(١) أ (٣، ٠)، ب (٣، ٢-)، ج (٠، ٢-)، د (٠، ٠)، هـ (٢-، ١-)  
 (٢) أ (٣-، ٠)، ب (٣-، ٢-)، ج (٠، ٢-)، د (٠، ٠)، هـ (٢-، ١-)

خواص الدوران :

نشاط (٣)



شكل (٦ - ٣٠)

(١) على مستوى إحداثي، ارسم المثلث أ ب ج، حيث أ (٣، ٣) ب (١-، ٣) ج (١-، ١-) كما في الشكل (٦ - ٣٠).  
 (٢) أوجد صورة  $\Delta$  أ ب ج بالدوران ( و ، ٩٠+)، سم المثلث الناتج أ ب ج

- ٣) باستخدام قانون البعد بين نقطتين أوجد كلاً من  $|أ ب|$ ،  $|أ ج|$ ،  $|أ ج د|$ ،  
 $|أ ب|$ ،  $|أ ج|$ ،  $|أ ج د|$ ،  $|أ ج د|$  .
- ٤) قارن بين أطوال أضلاع المثلث  $أ ب ج$  ونظائرها في المثلث  $أ ب ج$  .
- ٥) باستخدام المنقلة أوجد قياس كلٍ من  $\sphericalangle أ$ ،  $\sphericalangle ب$ ،  $\sphericalangle ج$ ،  $\sphericalangle أ$ ،  $\sphericalangle ب$ ،  $\sphericalangle ج$  .
- ٦) قارن بين قياسات زوايا المثلث  $أ ب ج$  ونظائرها في المثلث  $أ ب ج$  .
- من النشاط السابق نستنتج أن :

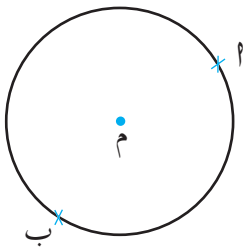
١) الدوران يحافظ على الأطوال .

٢) الدوران يحافظ على قياس الزوايا .

### تمارين ومسائل

[١] فسر معنى كلٍ مما يأتي :

- ١)  $(أ، م + ٣٠)$  و  $(أ، م + ٩٠)$  و  $(أ، م - ٣٠)$  و  $(أ، م - ٩٠)$  .
- [٢] أوجد صور كلٍ من النقاط الآتية:  $أ(٠، ٢)$ ،  $ب(٥، ٠)$ ،  $ج(-٣، ٢)$ ،  
 تحت تأثير كلٍ من : ١)  $(أ، م + ٩٠)$  و ٢)  $(أ، م - ٩٠)$  .



شكل (٦ - ٣١)

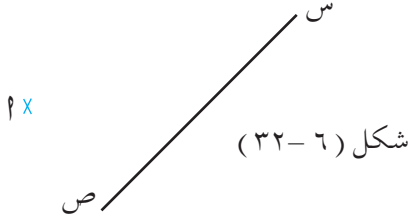
[٣] في الشكل (٦ - ٣١) : دائرة

مركزها (م) ،  $أ$  ،  $ب$  نقطتان عليها،

حدد النقطتين  $أ$  ،  $ب$  بحيث :

١)  $أ$  صورة  $ب$  بالدوران (م ،  $٧٠$ )

٢)  $ب$  صورة  $أ$  بالدوران (م ،  $-٣٠$ ) .



[ ٤ ] انقل الشكل ( ٦ - ٣٢ ) :

ثم ارسم صورة  $\overline{س ص}$   
بالدوران ( ١ ، - ٩٠ ) .

[ ٥ ] في مستوى إحداثي، ارسم  $\Delta$   $أ ب ج$ ، حيث  $أ ( ٢ ، ٣ )$ ،  $ب ( ٣ ، ١ )$ ،  
 $ج ( ١ ، ١ )$ ، ثم ارسم صورته بالدوران ( ٠ ، + ٩٠ ) .

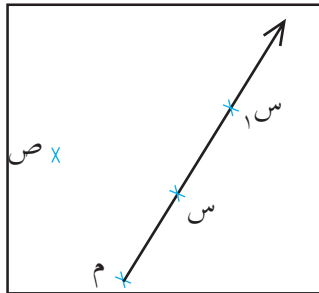
[ ٦ ] إذا كانت  $أ$  صورة النقطة  $أ$  بالدوران ( م ، - ٤٥ )، فما الدوران الذي  
يجعل النقطة  $أ$  صورة للنقطة  $أ$  ؟

## ٦ : ٦ التكبير

تمهيد :

تذكر أن كلاً من الانعكاس والانسحاب والدوران يحول كل نقطة في  
المستوى إلى نقطة أخرى في المستوى نفسه ، لذلك نسمي كل منها **تحويلاً هندسياً** ، وتذكر أيضاً أن التحويلات سابقة الذكر تحفظ قياس الأطوال ، لذلك  
تسمى **تحويلات متقايسة** .

في هذا البند ستتعرف على تحويل هندسي رابع يسمى التكبير ، وهو  
تحويل لا يحفظ الأطوال .



شكل ( ٦ - ٣٣ )

## نشاط (١)

في الشكل (٦-٣٣) : س ، ص ، م

ثلاث نقاط في المستوى .

- ارسم  $\overleftarrow{م س}$  ، وحدد عليه  $س_1$  بحيث  $\frac{2}{1} = \frac{|م س_1|}{|م س|}$  ،

بهذا الإجراء تكون قد حددت النقطة  $س_1$  صورة النقطة  $س$  بتكبير مركزه  $م$  ونسبته  $2$  ، تسمى هذه النسبة معامل التكبير .  
 - لتكن  $ص_1$  صورة  $ص$  بتكبير مركزه  $م$  ، ونسبته  $2$  .  
 - ما الشروط التي يجب أن **تحفظ** لهذا التكبير ؟

الشروط : ( ١ ) أن تقع  $ص_1$  على  $\overleftarrow{م ص}$  .

$$( ٢ ) \quad \frac{|م ص_1|}{|م ص|} = 2 .$$

- اختر نقاطاً أخرى في المستوى ، وحدد صورها بالتكبير السابق نفسه ماذا تلاحظ ؟

من النشاط السابق نستنتج أنه :

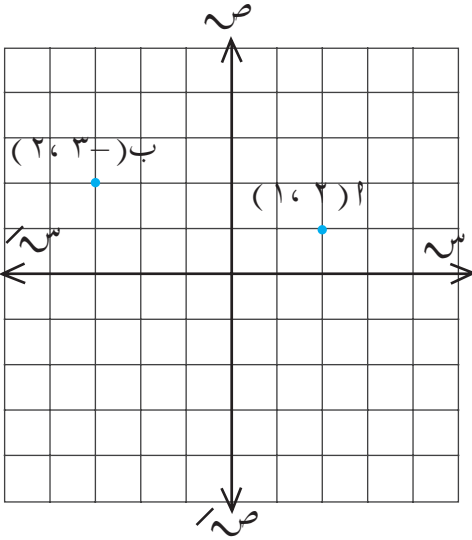
- لأي نقطة  $س$  في المستوى يمكن تعيين  $س_1$  صورة  $س$  بتكبير محدد المركز والمعامل .

- تكون النقطة  $س_1$  صورة النقطة  $س$  بتكبير مركزه  $م$  ومعامله  $د$  ، إذا كان :

$$( ١ ) \quad \overleftarrow{س_1 م س} \quad (س_1 \text{ تقع على } \overleftarrow{م س} ) .$$

$$( ٢ ) \quad د = \frac{|م س_1|}{|م س|} .$$

## نشاط (٢)



شكل (٦-٣٤)

- على مستوى إحداثي، حدد النقطة  
 أ (١، ٢) كما في الشكل (٦-٣٤)  
 - حدد النقطة أ، صورة أ بتكبير مركزه  
 و [نقطة الأصل (٠، ٠)] ومعامله ٣.  
 - ما إحداثي النقطة أ؟  
 - إذا كانت ب (-٢، ٣)، فما إحداثي  
 صورتها ب بالتكبير السابق نفسه؟

- ما نسبة إحداثي كل صورة إلى إحداثي النقطة نفسها؟  
 - قارن تلك النسب بمعامل التكبير، ماذا تلاحظ؟

تلاحظ أن :

$$\frac{\text{الإحداثي السيني لـ أ}}{\text{الإحداثي السيني لـ ب}} = \frac{١}{٣} = \frac{\text{الإحداثي السيني لـ أ}}{\text{الإحداثي السيني لـ ب}}$$

$$\frac{\text{الإحداثي الصادي لـ أ}}{\text{الإحداثي الصادي لـ ب}} = \frac{٢}{٣} = \frac{\text{الإحداثي الصادي لـ أ}}{\text{الإحداثي الصادي لـ ب}}$$

من النشاط السابق نستنتج أن :

صورة النقطة (س، ص) بتكبير مركزه نقطة الأصل (٠، ٠) ومعامله د هي (دس، دص).

سنرمز للتكبير الذي مركزه م ومعامله د بالرمز ت (م، د)

وحيث أن التكبير : ت ( م ، د ) ينقل النقطة ( س ، ص ) إلى النقطة  
 ( د س ، د ص ) فإننا نعبر عن ذلك رمزياً كما يلي :  
 ت : ( س ، ص ) ← ( د س ، د ص ) .

### مثال (١)

عين صورة كل نقطة مما يأتي بالتكبير [ ٢ ، ( ٠ ، ٠ ) أي :

ت : ( س ، ص ) ← ( ٢س ، ٢ص ) .

( أ ) ( ٣ ، ٣- ) ، ( ب ) ( ٢ ، ٤- ) ،  
 ( ج ) ( ٢ ١/٢ - ، ١ ١/٢ - ) ، ( د ) ( ٠ ، ٠ ) .

### الحل :

( أ ) ( ٣ ، ٣- ) ← ( ٣ × ٢ ، ٣- × ٢ ) = ( ٦ ، ٦- ) .

( ب ) ( ٢ ، ٤- ) ← ( ٢ × ٢ ، ٤- × ٢ ) = ( ٤ ، ٨- ) .

( ج ) ( ٢ ١/٢ - ، ١ ١/٢ - ) ← ( ٢ × ٢ ١/٢ - ، ٢ × ١ ١/٢ - ) = ( ٣- ، ٥- ) .

( د ) ( ٠ ، ٠ ) ← ( ٠ × ٢ ، ٠ × ٢ ) = ( ٠ ، ٠ ) .

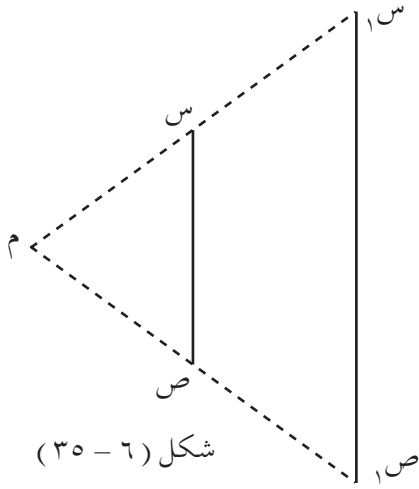
تلاحظ من المثال السابق الفقرة ( د ) أن صورة النقطة ( ٠ ، ٠ ) هي ( ٠ ، ٠ )  
 نفسها ذلك لأن النقطة ( ٠ ، ٠ ) هي مركز التكبير . وبصورة عامة ، لأي  
 تكبير ت ( م ، أ ) يكون : ت : م ← م أي أن صورة مركز التكبير  
 هي النقطة نفسها .

مثال (٢)

ارسم صورة  $\overline{سص}$  بالتكبير :

(١) ت (٢، م) . (ب) ت (١، م) حيث  $\overline{سص} \cong \overline{س_١ص_١}$  .

الحل:



(١) نحدد  $س_١$  صورة  $س$  بالتكبير (٢، م)، ثم  $ص_١$  صورة  $ص$  بالتكبير نفسه، نرسم  $\overline{س_١ص_١}$  وهي صورة  $\overline{سص}$  بالتكبير (٢، م) . [ انظر الشكل (٦-٣٥) ] .

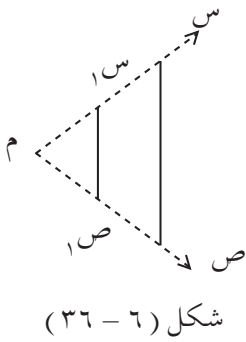
(ب) نحدد  $س_١$  صورة  $س$  بالتكبير (١، م)  $\frac{1}{2}$  باتباع ما يلي :

نرسم  $\overline{س_١م}$  ثم نحدد عليه نقطة

$$س_١ \text{ بحيث يكون } \frac{1}{2} = \frac{|س_١ م|}{|س م|}$$

(معامل التكبير)، فتكون  $س_١$  صورة

$س$  بالتكبير (١، م)  $\frac{1}{2}$  ،



- بنفس الطريقة نعين  $ص_١$  صورة  $ص$  بالتكبير (١، م)  $\frac{1}{2}$  ،

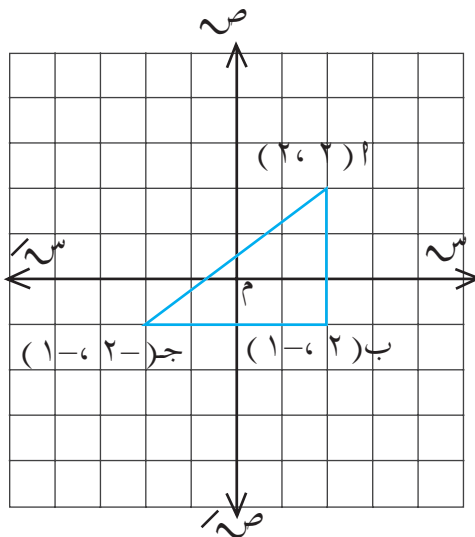
- نرسم  $\overline{س_١ص_١}$  وهي صورة  $\overline{سص}$  بالتكبير (١، م)  $\frac{1}{2}$  ،



لاحظ في الشكل ( ٦ - ٣٥ ) أن  $|اس_١| < |اس ص|$  ، وهي حالة تكبير  
 أما في الشكل ( ٦ - ٣٦ ) فتلاحظ أن  $|اس_١| > |اس ص|$  ، وهي حالة تصغير،  
 وبصورة عامة يحدث التصغير عندما تكون  $٠ < د < ١$  ،  
 أي عندما يكون معامل التكبير أكبر من الصفر وأقل من الواحد .

### خواص التكبير :

#### نشاط (٣)



شكل ( ٦ - ٣٧ )

على الشكل ( ٦ - ٣٧ ) : أ ب ج  
 مثلث، إحداثيات رؤوسه، كما في الرسم،  
 - انقل الشكل إلى ورقة رسم  
 بياني .  
 - ارسم المثلث أ ب ج ، صورة المثلث  
 أ ب ج بتكبير مركزه نقطة الأصل  
 ومعامله ٣ .

- ما إحداثيات النقاط أ ، ب ، ج .  
 - باستخدام قانون البعد بين نقطتين ، أوجد أطوال أضلاع  $\Delta \Delta$  أ ب ج ،  
 أ ب ج ، ثم قارن بينها ، ماذا تلاحظ ؟

$$٣ = \frac{|ا_١ ب_١|}{|ا ب|} = \frac{|ا_١ ج_١|}{|ا ج|} = \frac{|ب_١ ج_١|}{|ب ج|}$$

- باستخدام المنقلة أوجد قياس زوايا  $\Delta \Delta$  أ ب ج ، أ ب ج ، ثم قارن بين

قياس كل زاوية من  $\Delta$  ب ج وقياس الزاوية المناظرة لها ( صورتها ) من

المثلث  $\Delta$  ب ج ، ماذا تلاحظ ؟

في  $\Delta$  ب ج . تلاحظ أن  $\overline{AB} \perp \overline{BC}$  ، لماذا ؟

- هل  $\overline{AB} \perp \overline{BC}$  ؟ لماذا ؟

من النشاط السابق نستنتج أن :

١ - التكبير يكبر أبعاد الأضلاع أو يصغرها بنسبة معينة هي معامل التكبير

٢ - التكبير يحفظ قياس الزوايا .

مثال (٣)

إذا كانت  $S_1$  صورة  $S_2$  بتكبير  $k$  ( م ، د ) ، فأوجد

معامل التكبير ( د ) في كل من الحالات الآتية :

$$(١) \quad |m| = 4 \text{ سم} \quad ، \quad |m| = 12 \text{ سم}$$

$$(٢) \quad |m| = 8 \text{ سم} \quad ، \quad |m| = 4 \text{ سم}$$

$$(٣) \quad |s| = 4 \text{ سم} \quad ، \quad |s| = 24 \text{ سم}$$

الحل:

(١) حيث أن  $S_1$  صورة  $S_2$  بالتكبير  $k$  ( م ، د ) ، فإن :

$$d = \frac{|m|}{|s|} \quad (\text{شروط التكبير}) \quad ،$$

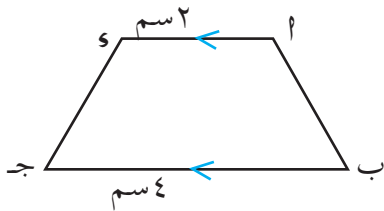
$$، \quad \therefore |m| = 4 \text{ سم} \quad ، \quad |m| = 12 \text{ سم}$$

$$\therefore d = \frac{12}{4} = 3$$

(٢) بنفس الأسلوب في (١) نجد أن :  $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4}$   
 (٣) من خواص التكبير نجد أن :

$$\frac{2}{4} = \frac{24}{4} = 6 \quad \therefore \quad \frac{2}{4} = \frac{24}{4} = 6 \quad \therefore \quad \frac{2}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

**مثال (٤)** في الشكل (٦-٣٨) :  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  شبه منحرف ، فيه



$\overline{AE} \parallel \overline{BF}$  ،  $AE = 2$  ،  $ED = 5$  ،  
 $\overline{BF} \parallel \overline{FC}$  ، فإذا كانت  $\overline{BF} \parallel \overline{FC}$   
 صورة  $\overline{AE}$  بتكبير (م) ، (٥) ،

فأوجد معامل التكبير (٥) ، وعين مركز التكبير (م) . شكل (٦-٣٨)

**الحل :**

$\therefore \overline{BF} \parallel \overline{AE}$  صورة  $\overline{AE}$  بالتكبير (م) ، (٥)

$$\therefore 2 = \frac{4}{2} = \frac{BF}{AE} = \frac{BF}{5} = \frac{BF}{5} = 2 \quad \therefore$$

ومركز التكبير (م) هي نقطة تقاطع  $\overline{AB}$  ،  $\overline{CD}$  ، لماذا ؟

**تدريب**

في الشكل (٦-٣٨) : ارسم  $\overline{AB}$  ،  $\overline{CD}$  ، حدد نقطة تقاطعهما (م) ،

$$\text{ثم تحقق أن } \frac{2}{5} = \frac{BM}{AM} = \frac{BM}{10} = \frac{2}{5}$$

## تمارين ومسائل

[ ١ ] عيّن صورة كلٍ من النقاط التالية :  $(٣، ٣)$  ،  $(٠، ٦-)$  ،  $(٣، ١٢-)$

تحت تأثير كلٍ من : (١) ت  $(٤، ٥)$  (٢) ت  $(٥، ٢)$  (٣) ت  $(٥، ٢)$  .

[ ٢ ] التكبير ت  $(٥، ٥)$  مركزه نقطة الأصل و  $(٠، ٠)$  ومعامله  $٥$  ، إذا كان :

ت  $(٥، ٥)$  :  $١ \leftarrow ١$  فأوجد معامل التكبير في كلٍ من الحالات الآتية :

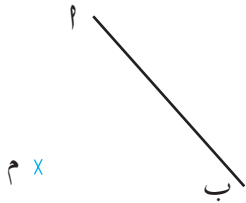
$$(١) \quad ١ \leftarrow (٢، ٣) \quad ١ \leftarrow (٨، ١٢)$$

$$(٢) \quad ١ \leftarrow (٥، ٥) \quad ١ \leftarrow (١٠، ٥)$$

$$(٣) \quad ١ \leftarrow (٨، ٤) \quad ١ \leftarrow (٢، ١)$$

$$(٤) \quad ١ \leftarrow (٩، ٦) \quad ١ \leftarrow (٩، ٥، ١٣)$$

[ ٣ ] انقل الشكل  $(٦ - ٣٩)$  إلى دفترك، ثم ارسم :



شكل  $(٦ - ٣٩)$

(١) صورة  $١$  بالتكبير  $(٣، ٣)$  .

(٢) صورة  $ب$  بالتكبير نفسه .

(٣) صورة  $\overline{١ ب}$  بالتكبير نفسه .

[ ٤ ] ارسم صورة  $\Delta$   $١ ب ج$  الذي رؤوسه  $١ (٢، ١)$  ،  $ب (٠، ١)$  ،

$ج (٢، ١-)$  بالتكبير  $(٥، ٢)$  ، حيث  $و$  هي نقطة الأصل  $(٠، ٠)$  .

[ ٥ ] بين أن  $\Delta \Delta$   $١ ب ج$  ،  $١ ب ج$  ،  $١ ب ج$  الموضحة بياناتهما في التمرين [ ٤ ]

متشابهة ( تذكر أنه : يتشابه المثلثان إذا تناسبت أضلاعهما المتناظرة ) .

## ٦ : ٧ تمارين عامة ومسابائل

[١] أوجد |س ص| في كل مما يلي :

أ) (٣، ٥) س ، (٢-، ٨) ص

ب) (٠، ٢) س ، (٥-، ٣) ص

ج) (١-، ٢) س ، (٤-، ٥) ص

[٢] أوجد إحداثيات نقطة منتصف س ص في كل مما يلي :

أ) (١، ٣) س ، (٣-، ١) ص

ب) (٢، ٣، ٥) س ، (٠، ١، ٥-) ص

ج) (١-، ٥، ٠) س ، (٠، ٤، ١، ٧) ص

[٣] حدد نوع التحويل الهندسي الذي يجعل ع<sub>١</sub> صورة ع<sub>٢</sub> ، كما في مثال

الفقرة (أ) في كل مما يلي :

أ) ع<sub>١</sub>(س ، ص) ← ع<sub>٢</sub>(٢س ، ٢ص) تكبير مركزه نقطة الأصل ومعامله ٢ ،

ب) ع<sub>١</sub>(س ، ص) ← ع<sub>٢</sub>(س ، -ص)

ج) ع<sub>١</sub>(س ، ص) ← ع<sub>٢</sub>(-ص ، س)

د) ع<sub>١</sub>(س ، ص) ← ع<sub>٢</sub>(س - ١ ، ص)

هـ) ع<sub>١</sub>(س ، ص) ← ع<sub>٢</sub>( $\frac{1}{4}$ س ،  $\frac{1}{4}$ ص)

و) ع<sub>١</sub>(س ، ص) ← ع<sub>٢</sub>(س ، ص + ٣)

[٤] عيّن صورة كل نقطة من النقاط : س (٠ ، -٣) ، ص ( $\frac{1}{4}$  ، ٢) ، ( $\frac{1}{4}$  ، ١) ،

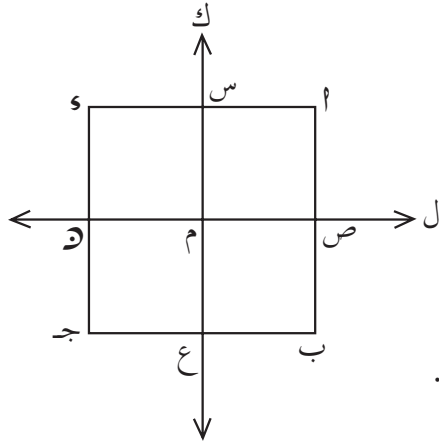
ع ( $\frac{3}{4}$  ، ٢-) تحت تأثير كل من :

١) انعكاس في المحور السيني .

ب) انسحاب في الاتجاه الموجب للمحور الصادي بمقدار ٣ وحدات .

ج) دوران مركزه نقطة الأصل و (٠، ٠) ، وزاويته ( - ٩٠ ) .

د) تكبير مركزه نقطة الأصل ومعامله ٣ .



شكل (٤٠ - ٦)

[٥] استعن بالشكل (٤٠-٦) وأكمل

الآتي ، علماً بأن : ا ب ج د مربع ،

١) صورة المثلث م ا ص بالانعكاس

في ك هي ....

ب) صورة المثلث م ص ب بانسحاب

مسافته | ا ب م | وفي اتجاه ب د هي ...

ج) صورة المثلث م ع ب بالدوران

( م ، ٩٠ ) هي ....

د) صورة المثلث ا ص م بالتكبير ( ٢ ، ١ ) هي ....

هـ) المستقيم .... يمثل محور تناظر للمستطيل ا ص د د .

و) الشكلان ا ص د د ، ب ص د ج متناظران حول المحور ....

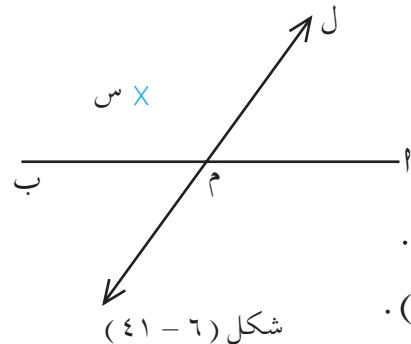
[٦] انقل الشكل (٤١-٦) إلى دفترك ثم

ارسم صورة ا ب تحت تأثير :

١) انعكاس في المحور ل .

ب) انسحاب مسافته | ا ب م | وباتجاه م ل .

ج) د ( م ، ٤٥ ) د ( س ، ٢ ) .



شكل (٤١ - ٦)

[٧] في مستوى إحداثي ، ارسم  $\Delta$  ٢ ب ج الذي إحداثيات رؤوسه هي  
١ ( ٣ ، ١ ) ، ب ( ٥ ، ٦ ) ، ج ( ٤ ، -١ ) ، ثم أجب عما يلي :  
١) بيّن أن  $\Delta$  ٢ ب ج قائم الزاوية .  
ب) أوجد إحداثيات نقطتي المنتصف للضلعين  $\overline{أب}$  ،  $\overline{أج}$  ، سمّهما  $د$  ،  $هـ$   
على الترتيب .

ج) ما التحويل الهندسي الذي يجعل  $\Delta$  ٢ ب ج صورة للمثلث  $١ د هـ$ ؟

[٨] على مستوى إحداثي ، ارسم مربعاً طول ضلعه ٢ سم ، ثم :

١) كبر أضلاعه إلى ثلاثة أمثالها ، كم تصبح مساحته ؟

ب) صغّر أضلاعه إلى النصف ، كم تصبح مساحته ؟

( اعتبر مركز التكبير هي نقطة الأصل في كل حالة ) .

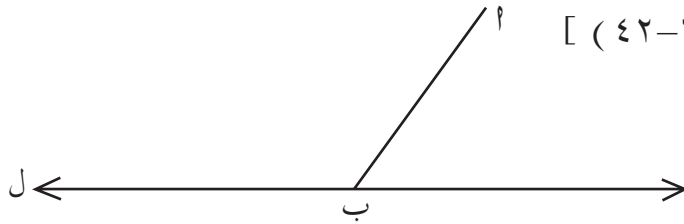
## ٦ : ٨ اختبار الوحدة

[١] إذا كانت  $s$  و  $(١، ١)$ ،  $هـ$  و  $(٣، ٢-)$  فأوجد :

١)  $|هـ و هـ|$  (ب) إحداثيات نقطة منتصف  $هـ و هـ$  .

[٢] ارسم صورة  $هـ ب$  بالانعكاس في  $ل$  ،

[ انظر الشكل (٦-٤٢) ]



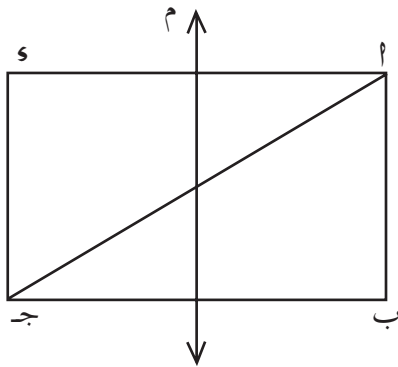
شكل (٦-٤٢)

[٣] اذكر خواص الانعكاس في محور .

[٤] في الشكل (٦-٤٣) حدد أي

من المستقيمان  $هـ ب$  ،  $س ج$  ، يعتبر محور

تناظر للمستطيل  $هـ ب ج س$  .



شكل (٦-٤٣)

[٥] في  $\Delta هـ ب ج$  :  $|هـ ب| = |هـ ج|$  ،

١) ارسم صورة  $\Delta هـ ب ج$  بانسحاب مسافته وحدتين وفي اتجاه  $ب ج$  ،

سم المثلث الناتج  $هـ١ ب١ ج١$  .

ب) هل  $|هـ١ ب١| = |هـ١ ج١|$  ؟ لماذا ؟





## مقدمة :

تعرفت في الصفوف السابقة على بعض الأساليب الخاصة بعرض البيانات الإحصائية كالجداول والأشكال البيانية ، وهي أساليب مهمة إلا أنها غير كافية أحياناً . لذلك لا بد لنا من أساليب أخرى تفيد في عرض وتلخيص البيانات الإحصائية وإجراء المقارنات ، من أبرز هذه الأساليب استخدام مقاييس إحصائية لوصف وتحليل البيانات وأول أنواعها ما يسمى بمقاييس النزعة المركزية . وفي هذه الوحدة سنتعرف على المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال ، وهي كثيرة الاستعمال لوصف البيانات الإحصائية في التطبيقات الحياتية المختلفة .

## ٧ : ١ المتوسط الحسابي

سبق وأن تعرفت على كيفية حساب المتوسط الحسابي باستخدام العلاقة التالية :

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع البيانات}}{\text{عددها}}$$

وكذلك على استخدامه للمقارنة ، فمثلاً : إذا كان متوسط دخل أسرة هو ( ١٠٠٠٠ ) ريال في الشهر ومتوسط دخل أسرة أخرى هو ( ١٢٠٠٠ ) ريال في الشهر فنقول أن دخل الأسرة الثانية أعلى من دخل الأولى . وفي الصف الثامن تعرفت على كيفية حساب المتوسط الحسابي من جداول تكرر بسيطة . وفي هذا الدرس سنتعمق في حساب المتوسط باستخدام جداول تكرر بسيطة بفئات وبدون فئات فمثلاً :

إذا كان لدينا الملاحظات التالية :  $s_1, s_2, \dots, s_n$  فإن المتوسط الحسابي يُعطى بالعلاقة التالية :

$$\bar{s} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

حيث  $s_1$  تعني الملاحظة الأولى ،  $s_2$  الملاحظة الثانية ... إلخ ، ( ... ) النقاط الثلاث تعني أن هناك ملاحظات أخرى ، أمّا  $s_n$  فتعني الملاحظة الأخيرة التي رتبها  $n$  ، وبالتالي فإن عدد الملاحظات هو  $n$  .

ولتسهيل التعبير عن المجموع السابق، يُستخدم الرمز مجـ ( ويُقرأ مجموع ) للدلالة على المجموع ، أي عندما يكون لدينا (  $n$  ) من الملاحظات ، فإن :

$$\bar{s} = \frac{\text{مجـ } s}{n}$$

**مثال (١)** عبّر عن المتوسط الحسابي بالرموز إذا كان لدينا البيانات التالية :

$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8$  .

**الحل :**

$$\bar{s} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_8}{8} = \frac{\text{مجـ } s}{8}$$

**مثال (٢)**

لدينا البيانات التالية : ٢ ، ٦ ، ٤ ، ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٠ ، ١ ، ١٤ .

أولاً : عبّر عن متوسطها الحسابي بالرموز .

ثانياً : أوجد متوسطها الحسابي .

الحل:

$$\frac{١س + ٢س + \dots + ٩س}{٩} = \frac{\text{مركز } ١س}{٩} = \bar{س} \quad \text{أولاً:}$$

$$\frac{١٤ + ١ + ١٠ + ٩ + ٥ + ٣ + ٤ + ٦ + ٢}{٩} = \bar{س} \quad \text{ثانياً:}$$

$$\therefore \bar{س} = \frac{٥٤}{٩} = ٦ .$$

### حساب المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري بسيط

سبق وأن تعرفت على أن التوزيعات التكرارية البسيطة نوعان ، هما :

– توزيعات تكرارية بسيطة بدون فئات .

– توزيعات تكرارية بسيطة كفئات .

تذكر أن :

الفئة هي مجموعة من المشاهدات ( الملاحظات ) أو البيانات تبدأ بملاحظة تسمى الحد الأدنى للفئة وتنتهي بملاحظة تسمى الحد الأعلى للفئة .

طول الفئة = ( الحد الأعلى للفئة - الحد الأدنى للفئة ) + ١ .

أو هو الفرق بين الحد الأدنى لفئة والحد الأدنى للفئة التي تليها .

مركز الفئة =  $\frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{٢}$  .

وحجم العينة هو مجموع التكرارات . الأمثلة التالية توضح كيفية حساب

المتوسط الحسابي من خلال التوزيع التكراري البسيط .

## أولاً : حساب المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري بدون فئات :

مثال (٣) جدول التوزيع التكراري التالي يبين درجات امتحان ٢٠ طالباً

في مادة الرياضيات [ الدرجة العظمى ( ٢٠ ) درجة ] :

الدرجة $\times$ التكرار س $\times$ ك	التكرار ك	الدرجة س
٢٢	٢	١١
٣٦	٣	١٢
٦٥	٥	١٣
٢٨	٢	١٤
٤٥	٣	١٥
٣٢	٢	١٦
٣٤	٢	١٧
١٨	١	١٨
٢٨٠ درجة	٢٠ طالباً	المجموع

حيث كمر تعني تكرار الدرجة سمر . احسب المتوسط الحسابي للبيانات  
العديدية السابقة .

**الحل :**

مجموع ( حواصل ضرب الدرجة  $\times$  تكرارها )  
المتوسط الحسابي =  $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{\text{مجموع التكرارات}}$

$$= \frac{\sum_{r=1}^k \text{س} \times \text{ك}}{\sum_{r=1}^k \text{ك}}$$

وباستخدام المعلومات من الجدول السابق نحصل على :

$$\bar{س} = \frac{٢٨٠}{٢٠} = ١٤ \text{ درجة .}$$

وبصورة عامة :

إذا كان لدينا الملاحظات :  $s_1, s_2, \dots, s_n$   
 لدينا التكرارات المناظرة :  $k_1, k_2, \dots, k_n$   
 فإن المتوسط الحسابي يُعطى من العلاقة :

$$\frac{\text{مجموع (حواصل ضرب الملاحظة} \times \text{تكرارها المناظر)} }{\text{مجموع التكرارات}} = \text{المتوسط الحسابي}$$

ورمزيًا :

$$\bar{s} = \frac{s_1 k_1 + s_2 k_2 + \dots + s_n k_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i k_i}{\sum_{i=1}^n k_i}$$

ثانياً : حساب المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري كفاءات :

اعتمد على جدول التكرار التالي ذي الفئات لإيجاد المتوسط

مثال (٤)

الفئة	مركز الفئة س <sub>م</sub>	التكرار ك <sub>م</sub>	مركز الفئة × التكرار س <sub>م</sub> × ك <sub>م</sub>
٣٠ - ٣٤	٣٢	٣	٩٦
٣٥ - ٣٩	٣٧	٦	٢٢٢
٤٠ - ٤٤	٤٢	١٠	٤٢٠
٤٥ - ٤٩	٤٧	٤	١٨٨
٥٠ - ٥٤	٥٢	٥	٢٦٠
٥٥ - ٥٩	٥٧	٢	١١٤
المجموع		٣٠	١٣٠٠

الحسابي  $\bar{s}$  :

## الحل:

من الجدول نجد أن عدد القيم  $s$  هي (6) قيم ،  
أي أن  $s = 6$  .

$$\begin{aligned} \therefore \text{مجموع تكرارات} &= s_1 k_1 + s_2 k_2 + s_3 k_3 + s_4 k_4 + s_5 k_5 + s_6 k_6 \\ &= 2 \times 57 + 5 \times 52 + 4 \times 47 + 10 \times 42 + 6 \times 37 + 3 \times 32 = \\ &= 1300 = 114 + 260 + 188 + 420 + 222 + 96 = \\ \text{مجموع التكرارات} &= \text{مجموع} k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 \\ &= 30 = 2 + 5 + 4 + 10 + 6 + 3 = \end{aligned}$$

$$\therefore s = \frac{\text{مجموع} s \cdot k}{\text{مجموع} k} = \frac{1300}{30} = 43,3 \text{ (تقريباً)} .$$

$\therefore$  حجم العينة في المثال السابق = 30 .

### مثال (5)

فيما يلي عدد القطع التي أنتجها (20) عاملاً في أحد المصانع .

33	32	37	40	35
37	20	35	33	37
37	27	35	32	40
39	25	40	37	39

- ٢) كوّن جدولاً تكرارياً من القطع بدون فئات ثم أوجد المتوسط الحسابي للدرجات .  
 ب) كوّن جدولاً تكرارياً كفئات بحيث يكون طول الفئة ( ٦ ) ثم أوجد المتوسط الحسابي .  
 ج) قارن بين المتوسطين في ١ ، ب .

**الحل:**

الدرجات	٢٠	٢٥	٢٧	٣٢	٣٣	٣٥	٣٧	٣٩	٤٠	المجموع
التكرار	١	١	١	٢	٢	٣	٥	٢	٣	٢٠
القطعة × التكرار	٢٠	٢٥	٢٧	٦٤	٦٦	١٠٥	١٨٥	٧٨	١٢٠	٦٩٠

المتوسط الحسابي =  $\frac{\text{مجموع ( حواصل ضرب القطعة × تكرارها )}}{\text{مجموع التكرارات}}$

$$= \frac{٦٩٠}{٢٠} = ٣٤,٥ \text{ قطعة}$$

الفئات	٢٠ - ٢٥	٢٦ - ٣١	٣٢ - ٣٧	٣٨ - ٤٣	المجموع
مركز الفئة	٢٢,٥	٢٨,٥	٣٤,٥	٤٠,٥	
التكرار	٢	١	١٢	٥	٢٠
مركز الفئة × التكرار	٤٥	٢٨,٥	٤١٤	٢٠٢,٥	٦٩٠

∴ المتوسط الحسابي =  $\frac{\text{مجموع ( حاصل ضرب مركز الفئة × تكرارها )}}{\text{مجموع التكرارات}}$

$$= \frac{٦٩٠}{٢٠} = ٣٤,٥$$

ج) تلاحظ أن المتوسطين متساويان .



## تمارين ومسائل

[ ١ ] اعتمد جدول التكرار التالي :

الملاحظة	٥	٤	٣	١	المجموع
التكرار	١	٤	٢	٣	١٠
الملاحظة × التكرار	٥	١٦	٦	٣	٣٠

٢) ما الملاحظة التي لها تكرار أكثر؟ ( ب ) احسب المتوسط الحسابي .

[ ٢ ] الجدول التكراري التالي يبين علامات أحد الصفوف في مادة الإحصاء

( الدرجة العظمى ٢٠ درجة ) .

الدرجة	٧	٩	١٠	١٢	١٤	١٥	١٧	١٨	المجموع
التكرار	٢	١	٢	٣	٢	٣	٤	٣	٢٠
الدرجة × التكرار									

٢) أكمل الجدول أعلاه . ( ب ) ما الدرجة التي لها تكرار أكثر؟

( ج ) احسب المتوسط الحسابي .

[ ٣ ] يمثل الجدول التكراري التالي بيانات موزعة في جدول كفاءات :

الفئات	١٠-١٤	١٥-١٩	٢٠-٢٤	٢٥-٢٩	المجموع
مركز الفئة	١٢	١٧	٢٢	٢٧	-
التكرار	٣	٧	١٢	٦	٢٨ طالباً
مركز الفئة × التكرار	٣٦	١١٩	٢٦٤	١٦٢	٥٨١

٢) ما عدد الفئات . ( ب ) ما حجم العينة؟

( ج ) احسب المتوسط الحسابي .

[ ٤ ] الجدول التكراري التالي يمثل علامات صف في مادة الرياضيات في إحدى المدارس :

الفئات	٢٠- ٢٨	٢٩- ٣٧	٣٨- ٤٦	٤٧- ٥٥	٥٦- ٦٤	المجموع
مركز الفئة	٢٤	٣٣	٤٢	٥١	٦٠	-
التكرار	٥	٧	١٥	١٠	١٣	٥٠
مركز الفئة × التكرار						

(أ) أكمل الجدول أعلاه .

(ب) ما حجم العينة ؟

(ج) احسب المتوسط الحسابي .

[ ٥ ] أكمل الجدول التكراري التالي ، ثم أوجد المتوسط الحسابي .

الفئات	١٠- ١٨	١٩- ٢٧	٢٨- ٣٦	٣٧- ٤٥	المجموع
مركز الفئة					
التكرار	٥	٨	١٠	٧	٣٠
مركز الفئة × التكرار					

[ ٦ ] البيانات التالية تمثل درجات الحرارة العظمى المسجلة خلال ٣٠ يوماً في مدينة صنعاء :

٢٤	٢٢	٢٢	٢٥	٢٧
٢٣	٢٥	٢٧	٢٢	٢٦
٢٢	٢٤	٢٥	٢٦	٢٤
٣٠	٢٢	٢٧	٢٣	٢٢
٢٣	٢٥	٢٤	٣٠	٢٤
٢٧	٢٩	٢٤	٢٦	٢٣

- ١) كوّن جدولاً تكرارياً بدون فئات ، ثم أوجد المتوسط الحسابي .  
ب) كوّن جدولاً تكرارياً كفئات بحيث يكون طول الفئة ( ٥ ) ثم أوجد المتوسط الحسابي .  
ج) قارن بين المتوسطين في ١ ، ب .

## ٧ : ٢ المنوال

يعتبر المنوال من أكثر مقاييس النزعة المركزية استخداماً، وذلك للسهولة في حسابه، حيث يُعرّف كالتالي :

**المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً في البيانات الإحصائية.**

### حساب المنوال لتوزيع تكراري بدون فئات :

**مثال (١)** إذا كان لديك البيانات الآتية :

١٦ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٢ ، ١١ ، ٩ ، ٨ ، ٨  
١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ١٩ ، ١٩ .  
فتلاحظ أن ( ١٥ ) تكررت ( ٥ ) مرات وهي أكثر البيانات تكراراً ،  
وعلى هذا الأساس فإن المنوال هو ( ١٥ ) .

**مثال (٢)**

اعتبر البيانات التالية : ٧ ، ٩ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٣٢ ، ٤٨ ، والتي تلاحظ أن تكرارات هذه البيانات متساوية ، أي أن كل منها تكررت مرة واحدة ، وفي هذه الحالة ليس لها منوال ، أي عديمة المنوال .

مثال (٣) إذا كان لديك الدرجات التالية :

١٨ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢٣ ، ٢٣ ، ٢٣ ، ٢٦ ، ٢٦ ، ٢٦ ، ٣١ ، ٣٥

تجد (٣) تكرارات للدرجة (٢٣) ومثلها للدرجة (٢٦) وهنا يمكن اعتبار كل منهما منوالاً، أي إذا تساوت قيمتان من حيث تكرارهما يكون للقيم منوالان .

### حساب المنوال لتوزيع تكراري كفئات :

في التوزيعات التكرارية ذات الفئات نستخدم التعريف التالي :

المنوال هو مركز الفئة ذات التكرار الأكبر .

مثال (٤) أوجد المنوال من جدول التوزيع التكراري التالي :

٤٥-٣٧	٣٦-٢٨	٢٧-١٩	١٨-١٠	الفئات
٧	١٠	٨	٥	التكرار

الحل :

نجد أن الفئة ( ٣٦ - ٢٨ ) لها أكبر تكرار ( ١٠ ) ، وبالتالي فإن المنوال هو

$$\text{مركز هذه الفئة ، أي أن المنوال} = \frac{٣٦ + ٢٨}{٢} = \frac{٦٤}{٢} = ٣٢ .$$

مثال (٥) أوجد المنوال للتوزيعات التكرارية التالية :

٣٥-٣٠	٢٩-٢٤	٢٣-١٨	١٧-١٢	١١-٦	٥-٠	الفئات
٣	٨	٧	٨	٥	٤	التكرار



[ ٣ ] أوجد المنوال للتوزيع التكراري التالي ، ثم احسب المتوسط الحسابي :

٥٩ - ٥٠	٤٩ - ٤٠	٣٩ - ٣٠	٢٩ - ٢٠	١٩ - ١٠	الفئات
٥٤,٥	٤٤,٥	٣٤,٥	٢٤,٥	١٤,٥	مركز الفئة
٣	١	٨	٥	٣	التكرار

[ ٤ ] أوجد المنوال والمتوسط الحسابي لجدول التوزيعات التكرارية التالية :

٥٤ - ٤٦	٤٥ - ٣٧	٣٦ - ٢٨	٢٧ - ١٩	١٨ - ١٠	الفئات
٣	٨	٣	٥	١	التكرار

[ ٥ ] الجدول التالي يوضح غياب طلاب الصف التاسع في إحدى المدارس خلال

العام الدراسي :

٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	٠	عدد أيام الغياب
٣	٦	١٠	١٧	٢٤	٢٢	١٥	٧	التكرار

١) أوجد المتوسط الحسابي لعدد أيام الغياب .

ب) أوجد المنوال لعدد أيام الغياب .

## ٧ : ٣ التكرار المتجمع

سبق أن تعلمت في الصفين السابع والثامن كيفية تكوين جداول إحصائية بيانية وكذلك جداول تكرارية بسيطة بدون فئات وبفئات . كما تعرفت على بعض أساليب التمثيل البياني .

وهنا سوف نتعرف على كيفية تكوين جداول للتكرار المتجمع ، أي التكرار التراكمي ، وهو نوعان تصاعدي وتنازلي ، كما سنتعرف على كيفية رسم منحني كل منهما .

## مثال (١)

يبين الجدول التكراري التالي توزيع درجات اختبار شهري في الرياضيات لطلاب الصف التاسع . (درجته العظمى ٣٠ درجة) .

الدرجات	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	المجموع
التكرار	١	١	٢	٨	٩	١٥	١٢	١٠	٤	٦٢

كوّن جدول التكرار المتجمع التصاعدي والتنزلي .

## الحل:

أولاً : لتكوين الجدول التكراري المتجمع التصاعدي نفتح سطرًا ثالثاً في الجدول السابق وذلك للتكرار المتجمع التصاعدي كما يلي :

أول تكرار = ١ ، ثاني تكرار = ١ + ١ = ٢ ، ثالث تكرار = ٢ + ٢ = ٤ ، رابع تكرار = ٤ + ٨ = ١٢ ، ... وهكذا ، فكل تكرار متجمع هو مجموع ذلك التكرار مع كل التكرارات السابقة ، فيكون جدول التكرار المتجمع الصاعد هو :

الدرجات	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	المجموع
التكرار	١	١	٢	٨	٩	١٥	١٢	١٠	٤	٦٢
التكرار المتجمع الصاعد	١	٢	٤	١٢	٢١	٣٦	٤٨	٥٨	٦٢	

ملحوظة : التكرار المتجمع الصاعد لدرجة ما هو عدد الطلاب الحاصلين على تلك الدرجة أو على درجة أصغر منها .

ثانياً : لتكوين جدول التكرار المتجمع التنزلي ، نفتح سطرًا ثالثاً للتكرار المتجمع التنزلي .

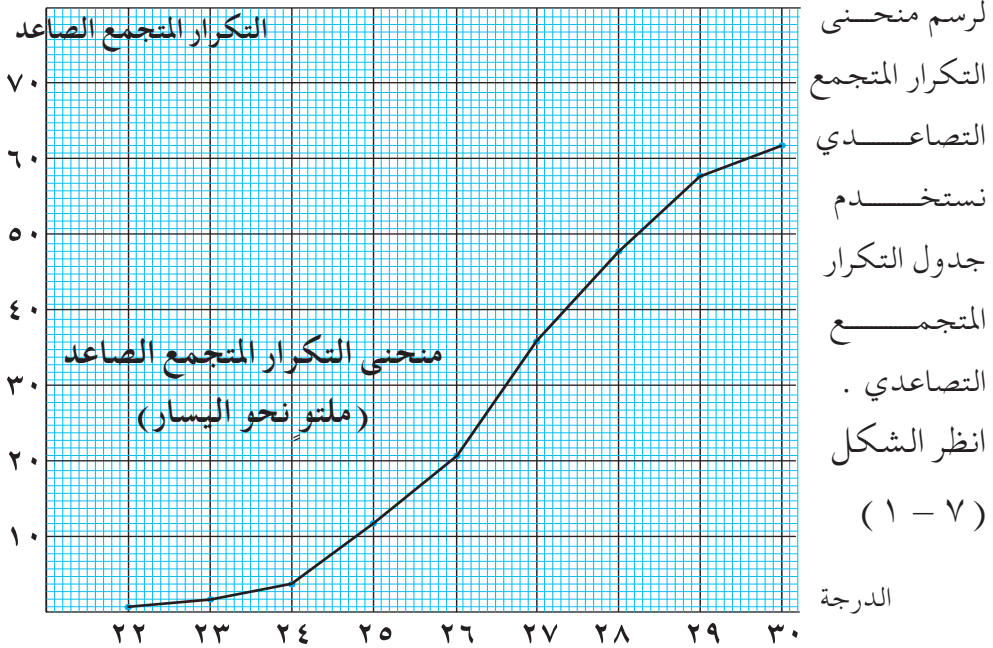
تعلم أن مجموع التكرارات في الجدول السابق هو ٦٢ ، هذه القيمة هي أول تكرار .

∴ أول تكرار = ٦٢ ، ثاني تكرار = ٦٢ - ١ = ٦١ ، ثالث تكرار = ٦١ - ١ = ٦٠ ، رابع تكرار = ٦٠ - ٢ = ٥٨ ، ... وهكذا ، فكل تكرار متجمع هو مجموع التكرارات كلها ناقصاً مجموع التكرارات السابقة .  
 فيصبح جدول التكرار المتجمع النازل كالتالي :

الدرجات	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	المجموع
التكرار	١	١	٢	٨	٩	١٥	١٢	١٠	٤	٦٢
التكرار المتجمع النازل	٦٢	٦١	٦٠	٥٨	٥٠	٤١	٢٦	١٤	٤	

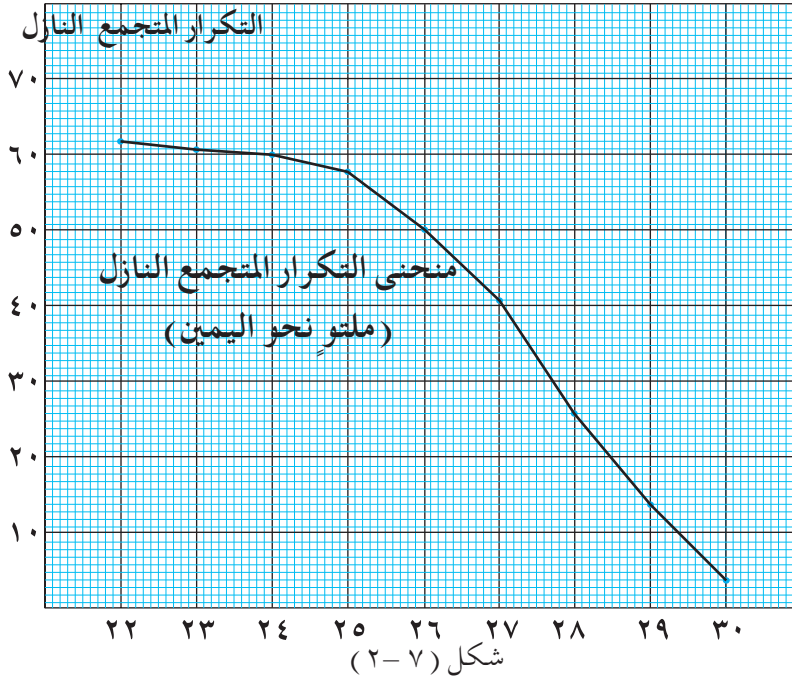
ملحوظة : التكرار المتجمع النازل لدرجة ما هو عدد الطلاب الحاصلين على هذه الدرجة أو على درجة أكبر منها .

### التمثيل البياني لجدولي التكرار المتجمع التصاعدي والتنازلي :



شكل (٧ - ١)





لرسم منحنى التكرار المتجمع التنازلي نستخدم جدول التكرار المتجمع التنازلي انظر الشكل (٧-٢).

الدرجة

ملحوظة :

\* يمكن تمثيل كل جدول تكراري (تصاعدي أو تنازلي) بيانياً منفرداً أو في رسم بياني واحد .

\* كما أنه يمكن عمل جدول واحد يحتوي التكرارين المتجمعين التصاعدي والتنازلي .

## تمارين ومسائل

[ ١ ] الجدول التكراري التالي يوضح درجات ( ٣٠ ) طالباً في اختبار شهري في مادة الرياضيات ( الدرجة العظمى ٣٠ درجة ) .

المجموع	٢٣	٢٠	١٧	١٤	١١	٨	الدرجة
٣٠	٢	٥	٤	١٠	٦	٣	التكرار
			٢٣			٣	التكرار المتجمع الصاعد
	٢					٣٠	التكرار المتجمع النازل

٢) أكمل الجدول السابق .

ب) ارسم منحني كل من التكرارين المتجمعين التصاعدي والتنازلي .  
 [ ٢ ] جدول التوزيع التكراري التالي يمثل درجات الصف التاسع في مادة العلوم  
 في أحد الاختبارات الشهرية : الدرجة العظمى ( ٥٠ درجة ) .

الفئات	مركز الفئة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
١٠ - ١٤		٤		
١٥ - ١٩	١٧	٩		
٢٠ - ٢٤		١٥		
٢٥ - ٢٩		١٢		٤٢
٣٠ - ٣٤		٢٠	٦٠	
٣٥ - ٣٩		٧		
٤٠ - ٤٤	٤٢	٣		
المجموع		٧٠		

٢) أكمل الجدول أعلاه .

ب) ارسم منحني التكرار المتجمع التصاعدي ومنحني التكرار المتجمع التنازلي على الشكل نفسه .

ج) ما النقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان التصاعدي والتنازلي ؟

د) أوجد المتوسط الحسابي .

[ ٣ ] الجدول التالي يوضح توزيعات التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل :

الفئات	مركز الفئة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
٤ - ٠	٢	١	١	
٩ - ٥		٣		٤٩
١٤ - ١٠		٩		
١٩ - ١٥		٨		
٢٤ - ٢٠	٢٢	١٠		
٢٩ - ٢٥		١٢		
٣٤ - ٣٠		٤		
٣٩ - ٣٥	٣٧	٣	٥٠	
	المجموع	٥٠		

٢) أكمل الجدول أعلاه .

ب) ارسم منحني التكرار المتجمع التصاعدي ومنحني التكرار المتجمع التنازلي على الشكل نفسه .

ج) ارسم عموداً من نقطة التقاطع على المحور الأفقي ، ما إحداثيات هذه النقطة ؟

د) أوجد المنوال . هـ) احسب المتوسط الحسابي .

[ ٤ ] بلغت أعمار ( ٣٠ ) عضواً ينتمون لنادٍ رياضي كما يلي :

١١ ١٢ ١٣ ٢٠ ٢١ ١١ ١٥ ١٦ ٣٠ ٣٦  
 ٢٢ ٢٠ ١٨ ١٩ ١٧ ١٢ ٢٠ ٢٣ ٢٧ ٢٩  
 ٢١ ٢٥ ٢٤ ٢٣ ٣١ ٣٢ ٣٥ ٣٦ ٣١ ٣٠

الفئات	مركز الفئة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
١٠ - ١٤				٣٠
			١٠	
	٢٧	٣		
٣٥ - ٣٩		٣		
المجموع		٣٠		

- ( أ ) أكمل الجدول ( علماً بأن طول الفئة = ٥ )  
 ( ب ) ارسم التكرار المتجمع التصاعدي والتكرار المتجمع التنازلي .  
 ( ج ) أوجد المنوال .  
 ( د ) أوجد المتوسط الحسابي .

## ٧ : ٤ الوسيط

البيانات التالية تمثل أوزان سبعة أطفال بالكيلوجرام ١٢ ، ٢١ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٥ ، ١٥ ، ١٦ وعند ترتيب هذه الأوزان تصاعدياً تكون :  
 ١٢ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢١ ، ٢٥ ، رتب هذه الأوزان تنازلياً .  
 تلاحظ أن القيمة ١٨ تتوسط هذه القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً  
 لذا نسمي مثل هذه القيمة الوسيط ويُعرف كالتالي :

الوسيط لمجموعة من القيم هو القيمة التي تتوسط هذه القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً .

وللحصول على الوسيط نرتب القيم إما تصاعدياً أو تنازلياً ثم نأخذ القيمة التي تقع في الوسط تماماً إذا كان عدد القيم (ن) عدداً فردياً، أما إذا كان عدد القيم (ن) عدداً زوجياً فإننا نأخذ متوسط القيمتين الوسطيتين لهذه القيم .

**مثال (١)** أوجد الوسيط للقيم الآتية :

أ ( ٢ ، ٧٨ ، ٨٨ ، ٥٥ ، ٦٢ ، ٧٠ ، ٨٢ ، ٨٠ )

ب ( ٣٢ ، ٢٨ ، ٢٥ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٠ ، ٣٨ ، ٢٢ )

**الحل:**

أ ( ترتب القيم تصاعدياً كما يلي :

٥٥ ، ٦٢ ، ٧٠ ، ٧٨ ، ٨٠ ، ٨٢ ، ٨٨ لاحظ أن القيمة ٧٨

تتوسط القيم ، وذلك لأن عددها فردياً .

∴ الوسيط لهذه القيم = ٧٨

ب ( نرتب القيم تصاعدياً كما يلي :

٢٢ ، ٢٥ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٨ نلاحظ أن القيمتين

٣٠ ، ٣٢ تتوسطان القيم ، وذلك لأن عددها زوجي .

∴ الوسيط =  $\frac{32 + 30}{2} = \frac{62}{2} = 31$  .

### حساب الوسيط في التوزيعات التكرارية :

عندما يكون لدينا توزيعات تكرارية ، فإنه لا يمكننا إيجاد الوسيط مباشرة

لذلك علينا ان نتبع الخطوات التالية :

(١) نكوّن جدولاً تكرارياً متجمعاً صاعداً أو نازلاً .

٢) نعيّن ترتيب الوسيط وهو  $\frac{\text{مجم ك}}{٢} = \frac{\text{ن}}{٢}$  سواء كانت (ن) فردية أم زوجية .

٣) نحدد الفئة الوسيطة التي تحتوي على ترتيب الوسيط .

٤) يتم حساب الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد من العلاقة الآتية :

$$\text{الوسيط} = ٢ + \frac{\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ك}_١}{\text{ك}_٢} \times \text{ل}$$

حيث : ٢ = الحد الأدنى الحقيقي للفئة الوسيطة .

ن = التكرار الكلي .

ك<sub>١</sub> = التكرار المتجمع التصاعدي للفئة السابقة للفئة الوسيطة

ك<sub>٢</sub> = تكرار الفئة الوسيطة .

ل = طول الفئة الوسيطة .

٥) يتم حساب الوسيط للتكرار المتجمع النازل من العلاقة الآتية :

$$\text{الوسيط} = \text{ب} - \frac{\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ك}_٣}{\text{ك}_٢} \times \text{ل}$$

حيث : ب = الحد الأعلى الحقيقي للفئة الوسيطة .

ن = التكرار الكلي .

ك<sub>٣</sub> = التكرار المتجمع التنازلي للفئة اللاحقة للفئة الوسيطة .

ك<sub>٢</sub> = تكرار الفئة الوسيطة .

ل = طول الفئة الوسيطة .

لدينا الجدول التكراري التالي :

مثال (٢)

التكرار	الملاحظة
٥	٥
١٠	٤
٢٠	٣
٢٥	٢
٤٠	١
١٠٠	المجموع

١) احسب الوسيط في حالة التكرار المتجمع التصاعدي .

ب) احسب الوسيط في حالة التكرار المتجمع التنازلي .

الحل:

١) نكوّن جدول التكرار المتجمع التصاعدي والتنازلي كما يلي :

الملاحظة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
٥	٥	٥	١٠٠
٤	١٠	١٥	٩٥
٣	٢٠	٣٥ <sup>ك١</sup>	٨٥
٢	٢٥ <sup>ك٢</sup>	٦٠	٦٥
١	٤٠	١٠٠	٤٠ <sup>ك٣</sup>
المجموع	١٠٠		

( ٢ ) ترتيب الوسيط =  $\frac{ن}{٢} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$  ويقع هذا الترتيب ضمن التكرار المتجمع التصاعدي ( ٦٠ ) وهذا يناظر الملاحظة ( ٢ ) وحيث إن ترتيب الوسيط يساوى ترتيب الفئة الوسيطة .

( ٣ ) الفئة الوسيطة هي ( ١,٥ - ٢,٥ ) حدها الأدنى الحقيقي ١,٥ وحدها الأعلى الحقيقي ٢,٥ وهي تناظر التكرار ( ٢٥ ) .  
طول الفئة =  $٢,٥ - ١,٥ = ١$

( ٤ ) نحسب الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد من العلاقة :

$$\text{الوسيط} = ١ + \frac{\frac{ن}{٢} - ك_١}{ك_٢} \times ل$$

$$\text{الوسيط} = ١,٥ + \frac{٣٥ - \frac{١٠٠}{٢}}{٢٥} \times ١$$

$$= ١,٥ + \frac{١٥}{٢٥} \times ١ =$$

$$= ١,٥ + \frac{٣}{٥} = ١,٥ + ٠,٦ = ٢,١ =$$

( ٥ ) نحسب الوسيط للتكرار المتجمع التنازلي من العلاقة :

$$\text{الوسيط} = ب - \frac{\frac{ن}{٢} - ك_٣}{ك_٣} \times ل$$

$$= ٢,٥ - \frac{\frac{١٠٠}{٢} - ٤٠}{٢٥} \times ١ = ٢,٥ - \frac{١٠}{٢٥} =$$

$$= ٢,٥ - ٠,٤ = ٢,١ =$$



## ملاحظة :

الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد هو نفسه للتكرار المتجمع النازل وبالتالي يمكن حسابه بوحدة فقط من هاتين الطريقتين .

## مثال (٣)

من جدول التكرار الآتي أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع الصاعد :

التكرار	الفئات
٢	٧ - ٣
٣	١٢ - ٨
١٠	١٧ - ١٣
٥	٢٢ - ١٨
٤	٢٧ - ٢٣
٢٤	المجموع

(١) نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد كما يلي :

الحل :

التكرار المتجمع الصاعد	التكرار	الفئات
٢	٢	٧ - ٣
٥ <sup>ك١</sup>	٣	١٢ - ٨
١٥	١٠ <sup>ك٢</sup>	١٧ - ١٣
٢٠	٥	٢٢ - ١٨
٢٤	٤	٢٧ - ٢٣
	٢٤	المجموع

(٢) ترتيب الوسيط =  $\frac{ن}{٢} = \frac{٢٤}{٢} = ١٢$  ويقع هذا الترتيب ضمن التكرار

المتجمع التصاعدي (١٥) وهذا يناظر الفئة (١٣ - ١٧) .

(٣) الفئة الوسيطة هي (١٢,٥ - ١٧,٥) حدها الأدنى ١٢,٥ وحدها

الأعلى ١٧,٥ ، طول الفئة = ١٧,٥ - ١٢,٥ = ٥

(٤) نحسب الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد من العلاقة :

$$\text{الوسيط} = ٢ + \frac{\frac{ن}{٢} - ك_١}{ك_٢} \times ل$$

$$\text{الوسيط} = ١٢,٥ + \frac{٥ - \frac{٢٤}{٢}}{١٠} \times ٥$$

$$١٦ = ٣,٥ + ١٢,٥ = \frac{٣٥}{١٠} + ١٢,٥ = ٥ \times \frac{٧}{١٠} + ١٢,٥ =$$

في المثال (٣) احسب الوسيط باستخدام التكرار المتجمع النازل

**تدريب**

تأكد من أن قيمة الوسيط مطابقة للقيمة التي حصلت عليها بالنسبة

للتكرار المتجمع الصاعد .

### حساب الوسيط بيانياً :

يمكننا إيجاد الوسيط من خلال الرسم البياني وذلك باتباع الخطوات التالية :

– نرسم منحنى التكرار المتجمع التصاعدي مع منحنى التكرار المتجمع التنازلي

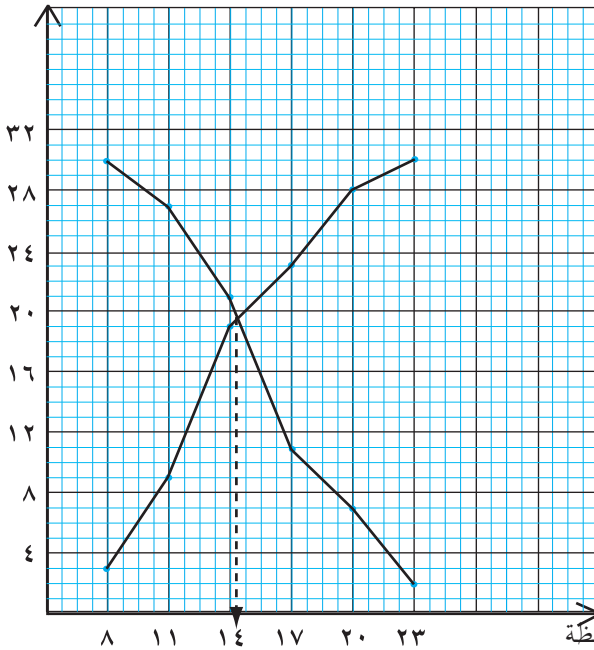
ومن نقطة تقاطع هذين المنحنيين انزل عموداً على المحور الأفقي .

– نقطة تقاطع العمود مع المحور الأفقي هي الوسيط .

مثال (٤) أوجد الوسيط بيانياً باستخدام المعلومات الواردة في جدول التكرار التالي :

الملاحظة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
٨	٣	٣	٣٠
١١	٦	٩	٢٧
١٤	١٠	١٩	٢١
١٧	٤	٢٣	١١
٢٠	٥	٢٨	٧
٢٣	٢	٣٠	٢
	٣٠		

التكرار المتجمع



شكل (٧-٣)

الحل:

- ارسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل .
  - عين نقطة تقاطع المنحنيين .
  - أنزل عموداً من نقطة تقاطع المنحنيين على المحور الأفقي .
  - نلاحظ أن العمود يقطع المحور الأفقي عند القيمة ١٤ تقريباً .
- الوسيط  $\approx 14$  .

تحقق من صحة الإجابة جبرياً .

تدريب

## تمارين ومسابل

[ ١ ] أوجد الوسيط لكل من القيم التالية :

٩ ، ٦ ، ١٢ ، ٧ ، ٤ ( أ )

٣١ ، ٤٦ ، ٣٩ ، ٤٢ ، ٦٥ ، ٢٨ ، ٣٧ ( ب )

١٥ ، ١٧ ، ١١ ، ١٤ ، ٨ ، ١٢ ( ج )

٩٥ ، ٩٢ ، ٧٥ ، ٨١ ، ٧٩ ، ٨٥ ، ٧٣ ، ٨٢ ( د ) .

[ ٢ ] إذا كانت أعمار خمسة أشخاص كما يلي :

٤٤ ، ٣٧ ، ٢٨ ، ٣٥ ، ٣٣ . أوجد الوسيط لهذه الأعمار .

[ ٣ ] أوجد الوسيط لجدول التكرار التالي باستخدام التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل ، وقارن بين الإجابتين .

الملاحظة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
٣٢	٣	٣	٣٠
٣٧	٦	٩	٢٧
٤٢	١٠	١٩	٢١
٤٧	٤	٢٣	١١
٥٢	٥	٢٨	٧
٥٧	٢	٣٠	٢
المجموع	٣٠		

[ ٤ ] لديك الجدول التكراري ذو الفئات التالية :

الفئات	٥ - ٢	٩ - ٦	١٣ - ١٠	١٧ - ١٤	المجموع
التكرار	٥	٤	٨	٣	٢٠
التكرار المتجمع الصاعد	٥	٩	١٧	٢٠	
التكرار المتجمع النازل	٢٠	١٥	١١	٣	

١ ( أ ) أوجد الوسيط باستخدام التكرارين المتجمعين الصاعد والنازل .

( ب ) أوجد الوسيط بيانياً .

[ ٥ ] الجدول التالي يوضح درجات الحرارة المسجلة خلال خمسة وعشرين يوماً لمدينة الحوطة بلحج :

المجموع	٣٦	٣٥	٣٤	٣٢	٢٩	درجة الحرارة
٢٥	٢	٨	٧	٥	٣	التكرار
	٢٥	٢٣	١٥	٨	٣	التكرار المتجمع الصاعد
	٢	١٠	١٧	٢٢	٢٥	التكرار المتجمع النازل

( أ ) احسب الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد .

( ب ) احسب الوسيط للتكرار المتجمع النازل .

( جـ ) أوجد الوسيط بيانياً . ( د ) قارن بين الوسيطات الثلاثة .

## ٧ : ٥ تمارين ومسائل عامة

[ ١ ] أوجد المتوسط الحسابي والوسيط للقيم التالية :

( أ ) ١٧ ، ٢٦ ، ٣٢ ، ٢٢ ، ٢٧

( ب ) ٥٥ ، ٦٢ ، ٥٨ ، ٦٠ ، ٦٣ ، ٥٩

[ ٢ ] إذا كانت قيم المتغير س هي : ٨ ، ١١ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥

( أ ) أوجد قيمة المتوسط الحسابي وقيمة الوسيط للمتغير س .

( ب ) أوجد قيمة المتوسط الحسابي وقيمة الوسيط للمتغير س + ٣ .

[ ٣ ] أوجد المنوال لكل من الحالات الآتية :

( أ ) ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٨ ، ٥ ، ٩ ، ٥ .

( ب ) ١٤ ، ١٦ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٤ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٣ ، ١٧ .

( جـ ) ٢٦ ، ٣٢ ، ٢٤ ، ٢٧ ، ٢٩ .

[ ٤ ] الجدول التكراري التالي يبين علامات طلاب الصف التاسع في مادة العلوم ( الدرجة العظمى ٦٠ درجة ) .

الدرجة	٢١	٢٧	٣٠	٣٦	٤٢	٤٥	٥٤	٥٦	المجموع
التكرار	٥	٨	٨	١٤	١٣	١٦	١٢	٤	٨٠
الدرجة × التكرار									

١ ( أكمل الجدول التكراري أعلاه . ب ) ما حجم العينة .  
 ج ) احسب المتوسط الحسابي . د ) أوجد المنوال لهذه الدرجات .  
 هـ ) احسب الوسيط لهذه الدرجات .

[ ٥ ] البيانات التالية تمثل عدد الأشخاص الذين ارتادوا المكتبة خلال عشرة أيام:

١٣٢ ، ١٣٢ ، ١٣٥ ، ١٣٦ ، ١٤٠

١٤٢ ، ١٤٦ ، ١٣٥ ، ١٤٨ ، ١٥٠

١ ( اكتب البيانات السابقة في جدول تكراري ثم احسب المتوسط الحسابي والوسيط لهذه البيانات .

ب ) اكتب البيانات السابقة في جدول تكراري بشكل فئات بحيث يكون طول الفئة = ٤ ، ثم أوجد المتوسط الحسابي والوسيط لهذه البيانات .  
 ج ) قارن بين المتوسطين الحسابيين في ١ ، ب وكذلك بين الوسيطين في ١ ، ب أيضاً .

[ ٦ ] الجدول التالي يوضح استهلاك الماء بالتر المكعب لعشرين أسرة في مدينة الحديدة خلال شهرين فقط :

كمية الماء بالتر المكعب	٣٠	٣٢	٣٣	٣٥	٣٨	المجموع
التكرار	٣	٥	٨	٢	٢	٢٠
التكرار المتجمع الصاعد						
التكرار المتجمع النازل						

- ١) أكمل الجدول .
- ب) أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع الصاعد .
- ج) أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع النازل .
- د) أوجد الوسيط بيانياً . هـ) قارن بين الوسيطات الثلاثة السابقة .
- [٧] البيانات التالية توضح عدد أفراد ٣٠ أسرة في محافظة إب :

٥ ، ٤ ، ١ ، ٥ ، ٦ ، ٣ ، ٧ ، ٩ ، ٣ ، ٤

٨ ، ٣ ، ٢ ، ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٧ ، ٨ ، ٦

٤ ، ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٧ ، ٥ ، ٤ ، ٨ ، ٩

١) كوّن جدولاً تكرارياً للبيانات السابقة ، ثم أوجد المتوسط والوسيط والمنوال .

ب) كوّن جدولاً تكرارياً للبيانات السابقة بشكل فئات بحيث يكون طول الفئة = ٢ ، ثم أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع

الصاعد والمتوسط الحسابي .

ج) أوجد الوسيط بيانياً .

## ٧ : ٦ اختبار الوحدة

[١] أوجد كلاً من المتوسط الحسابي والمنوال والوسيط لكل من القيم التالية :

١) ٥ ، ٤ ، ٨ ، ٦ ، ١٣ ، ٥ ، ١١ ، ٥ ، ١٥

ب) ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٩ ، ٣ ، ١٥ ، ٣ ، ٧

[ ٢ ] لديك جدول التوزيع التكراري الآتي :

الملاحظة	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
التكرار	٣	٥	٢	٣	٣	١٦
الملاحظة × التكرار	٣	١٠	٦	١٢	١٥	٤٦

أوجد : ( أ ) المتوسط الحسابي . ( ب ) المنوال .

[ ٣ ] لديك جدول التوزيع التكراري الآتي :

الفئات	٥ - ٣	٨ - ٦	١١ - ٩	١٤ - ١٢	المجموع
مركز الفئة					
التكرار	٢	٦	٦	٣	١٧
مركز الفئة × التكرار					

( أ ) أكمل الجدول . ( ب ) أوجد المنوال .

( ج ) أوجد المتوسط الحسابي .

[ ٤ ] الجدول التالي يوضح درجات ٣٥ طالباً في مادة اللغة العربية :

الدرجة	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
التكرار	٢	٣	٦	٩	٨	٥	٢	٣٥
التكرار المتجمع الصاعد								
التكرار المتجمع النازل								

( أ ) أكمل الجدول .

( ب ) أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع الصاعد .

( ج ) أوجد الوسيط بيانياً . ( د ) قارن بين الوسيطين .



# بِحَمْدِ اللَّهِ

## استبانة تقويم الكتاب

### بيانات المستجيب:

الاسم / .....	المؤهل وتاريخه / .....	التخصص / .....
العمل الحالي / .....	المحافظة / .....	

### بيانات الكتاب:

المادة / .....	الصف / .....	اسم الكتاب / .....
الجزء / .....	الطبعة / .....	السنة الدراسية / .....
تاريخ تعبئة الاستبانة / .....		

نهدف من هذه الاستبانة تقويم الكتاب بغرض تحسينه في الطبعات القادمة.  
نرجو التكرم بوضع علامة (✓) تحت الوصف الذي تراه مناسباً لإيجابتك أمام كل بند.

ضعيف	مقبول	جيد جداً	بند	ضعيف	مقبول	جيد جداً	بند
			<b>ثالثاً - الوسائل التعليمية:</b> - وضوحها ودقتها . - ارتباطها بموضوعات الدرس . - مدى ارتباطها بالأهداف .				<b>أولاً - الأهداف:</b> - وضوح الصياغة . - تقيس فكرة محددة . - يمكن قياسها .
			<b>رابعاً - التقويم:</b> - الأنشطة والتمارين تكسب المتعلم مهارات متنوعة . - بطاقات التفكير تثير دافعية البحث والإطلاع . - الأسئلة والتمرينات تقيس مدى تحقيق الأهداف . - مناسبة لمستوى المتعلم . - دقة وضوح الصياغة . - تراعي الفروق الفردية . - متنوعة وشاملة للجوانب المعرفية . - تساعد المتعلم في تطبيق ما تعلمه في مواقف الحياة المختلفة . - كفاية الأسئلة في مساعدة المتعلم على استيعاب مادة الكتاب .				<b>ثانياً - المادة العلمية وأسلوب عرضها:</b> - ملائمة لغة الكتاب لمستوى المتعلم . - سلامة ووضوح لغة الكتاب . - ترسيخ المحتوى للقيم الدينية والوطنية . - مادة الكتاب تكسب المتعلم خبرات جديدة . - ملائمة المادة لمشكلات المتعلم واهتماماته . - مادة الكتاب تساعد المتعلم على فهم المشكلات . - مادة الكتاب تراعي الفروق الفردية . - خلو الكتاب من التكرار في الموضوعات . - يراعي أسلوب عرض المادة الترابط والتسلسل المنطقي . - مراعاة مادة الكتاب للحدائق والدقة العلمية . - عرض المادة تحفز على القراءة والبحث والتفكير . - تحقيق المحتوى لأهداف المادة .
			<b>خامساً - الشكل والإخراج الفني:</b> - ارتباط الغلاف بمحتوى الكتاب . - متانة تجليد الكتاب . - وضوح الألوان ومناسبتها . - وضوح ودقة الطباعة . - نوعية ورق الكتاب .				







التكرار المتجمع

